Sur les endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{P}^k$

Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony

February 1, 2008

Abstract

Let f_1, f_2 be holomorphic endomorphisms of $\mathbb{P}^k$, of degrees $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 2$. Assume that $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ and that $d_1^{n_1} \neq d_2^{n_2}$ for all integers n_1, n_2. We then show that f_j are critically finite. Moreover there is an orbifold $(\mathbb{P}^k, n)$ such that f_1, f_2 are coverings of $(\mathbb{P}^k, n)$. In the $\mathbb{P}^2$ case we give the list of commuting pairs satisfying the above conditions.

1 Introduction

Dans [20], S. Smale pose le problème suivant. Etant donné une variété compacte M, est-ce que tout difféomorphisme de M peut être approché par des difféomorphismes qui commutent seulement avec leurs itérés? Il ajoute “I find this problem interesting in that it gives some focus in the dark realm, beyond hyperbolicity, where even the problems are hard to pose clearly”.

Dans le cadre de la dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^1$ le problème a vivement intéressé Fatou [9] et Julia [13]. De fait ils ont résolu l'équation fonctionnelle:

$$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 \tag{1}$$

où f_1 et f_2 sont des polynômes d'une variable complexe de degré $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ [9, 13]. Ritt [15] a résolu cette équation fonctionnelle pour les fractions rationnelles. Fatou-Julia considéraient que l'un des buts de la théorie de l'itération était l'investigation des équations fonctionnelles.

Lorsque deux applications rationnelles sont *permutables* (c'est-à-dire si elles vérifient la relation (1)), les objets dynamiques qui leur sont associés

sont fortement liés. En particulier, elles ont même ensemble de Julia et même mesure d'équilibre. Utilisant ces notions dynamiques Eremenko [8] a donné une version nouvelle des résultats de Ritt. Il utilise en particulier la notion d'orbifold considérée par Thurston [22].

Dans cet article nous nous intéressons à l'équation (1) lorsque f_1, f_2 sont des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$.

Pour cela nous nous utilisons sur les progrès récents de la théorie de l'itération des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$. Nous renvoyons à [2, 10, 18] pour une description de ces développements. L'exposé [18] est adapté à nos besoins.

Si on pose $h^m := h \circ \cdots \circ h$ (m fois) et $h^n := h \circ \cdots \circ h$ (n fois). Il est clair que h^m et h^n sont permutables lorsque h est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$. Nous limiterons notre étude au cas où

$$f_1^{n_1} \neq f_2^{n_2} \text{ pour tous nombres naturels non nuls } n_1 \text{ et } n_2 \tag{2}$$

Cette condition est vraie en particulier si

$$d_1^{n_1} \neq d_2^{n_2} \text{ pour tous nombres naturels non nuls } n_1 \text{ et } n_2 \tag{3}$$

Notons $w := [w_0 : \cdots : w_k]$ (resp. $z := (z_1, \ldots, z_k)$) les coordonnées homogènes (resp. les coordonnées affines) de $\mathbb{P}^k$ où $z_s := w_s/w_0$.

Dans le cas de dimension 1 ($k = 1$), les solutions de (1)(2) sont (pour une certaine coordonnée z, [8]):

1. $f_1(z) = z^{\pm d_1}$ et $f_2(z) = \lambda z^{\pm d_2}$ avec $\lambda \neq 0$ convenablement choisi;

2. $f_1(z) = \pm \mathrm{T}_{d_1}(z)$ et $f_2(z) = \pm \mathrm{T}_{d_2}(z)$ avec les signes $\pm$ convenables où $\mathrm{T}_{d_i}(\cos z) := \cos(d_i z)$ est le *polynôme de Tchebychev* de degré d_i;

3. f_1 et f_2 sont des *applications de Lattès*, c'est-à-dire il existe une application holomorphe surjective $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$, des applications affines Λ_i et un groupe d'automorphismes affines discret $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$, agissant transitivement sur les fibres de φ tels que $f_i \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_i$.

Notre résultat principal est le théorème suivant, qui dans le cas de dimension 1, permet de retrouver les trois solutions décrites ci-dessus:

Théorème 1.1 *Soient f_1 et f_2 deux endomorphismes holomorphes permutables de degrés $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ de $\mathbb{P}^k$. Supposons que $d_1^{n_1} \neq d_2^{n_2}$ pour tous*

n_1, n_2 entiers strictement positifs. Alors il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k$ et des applications affines holomorphes Λ_1, Λ_2 tels que $\varphi(\mathbb{C}^k)$ soit un ouvert de complément pluripolaire de $\mathbb{P}^k$ et tels que $f_i \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_i$. De plus, il existe un groupe discret d'applications affines holomorphes $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}^k$ agissant transitivement sur les fibres de φ.

Remarque 1.2 Les applications φ qui interviennent dans ce théorème sont donc invariantes par le groupe $\mathcal{A}$.

Soit X une variété complexe. Notons $\mathcal{H}(X)$ l'espace des sous-ensembles analytiques irréductibles de codimension 1 de X. On appelle *orbifold* un couple (X, n) où n est une fonction définie sur $\mathcal{H}(X)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$ égale à 1 sauf sur une famille localement finie de sous-ensembles analytiques de X. *Un revêtement d'orbifolds* $\pi : (X_1, n_1) \longrightarrow (X_2, n_2)$ est un revêtement ramifié de $X_1 \setminus \bigcup_{n_1(H)=\infty} H$ dans $X_2 \setminus \bigcup_{n_2(H)=\infty} H$ vérifiant $\mathrm{mult}(\pi, H).n_1(H) = n_2(\pi(H))$ pour tout $H \in \mathcal{H}(X_1)$, où $\mathrm{mult}(\pi, H)$ désigne la multiplicité de π en un point générique de H.

Soit f une application holomorphe de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^k$ définissant un revêtement d'un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^k, n)$ dans lui-même. Alors, l'ensemble critique de f est *prépériodique*, c'est-à-dire $f^n(\mathcal{C}_f) = f^m(\mathcal{C}_f)$ pour certains $0 \leq n < m$ où $\mathcal{C}_f$ désigne l'ensemble critique de f. On dit qu'une telle application est *critiquement finie*. Dans le cas de dimension 1, le corollaire suivant se réduit au théorème de Fatou-Julia-Ritt [8]:

Corollaire 1.3 *Sous l'hypothèse du théorème 1.1, il existe un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^k, n)$ tel que les applications f_1 et f_2 définissent des revêtements de $\mathcal{O}$ dans lui-même. En particulier, f_1 et f_2 sont critiquement finies.*

Pour tout $k \geq 3$, le théorème 1.1 et le corollaire 1.3 ne sont plus vrais si l'on remplace la condition (3) par la condition (2). Donnons un exemple.

Exemple 1.4 Soient h_1 et h_2 deux fractions rationnelles de Lattès permutables, de même degré $d \geq 2$ vérifiant $h_1^n \neq h_2^n$ pour tout $n \geq 1$. On peut prendre par exemple $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ la fonction elliptique de Weierstrass de périodes 1 et i; $\mathcal{A}$ le groupe engendré par les automorphismes $z \mapsto z + 1$, $z \mapsto z + i$ et $z \mapsto -z$; $\Lambda_1(z) := (1+2i)z$; $\Lambda_2(z) := (1-2i)z$; $d = 5$ et les applications h_1, h_2 satisfaisant $h_1 \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_1$, $h_2 \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_2$ (*voir* [8]). Dans les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1$, on peut écrire $h_i = [P_i : Q_i]$ où P_i et Q_i sont des polynômes

homogènes de deux variables de degré d. Considérons les deux endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}^3$ définis par $f_1(z) = (P_1(z_1, z_2), Q_1(z_1, z_2), R(z_3))$ et $f_2(z) = (\lambda P_2(z_1, z_2), \lambda Q_2(z_1, z_2), R(z_3))$ où R est un polynôme de degré d et λ est une constante non nulle. Ces endomorphismes se prolongent en des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^3$ vérifiant (2). Pour des λ convenables, ces endomorphismes sont permutables. Si R n'est pas critiquement fini, f_1 et f_2 ne sont pas critiquement finis. Le Théorème 1.1 n'est pas valide dans ce cas car le groupe $\mathcal{A}$ n'existe pas.

Les exemples suivants sont des solutions du problème (1)(2). Pour simplifier les notations, nous nous limitons au cas de $\mathbb{P}^2$.

Exemple 1.5 Soient h_1 et h_2 des endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{P}^1$. Dans les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1$, il existe des polynômes homogènes à deux variables P_i et Q_i tels que $h_i = [P_i : Q_i]$ pour $i = 1$ ou 2. Les endomorphismes holomorphes f_i de $\mathbb{P}^2$ définis en coordonnées affines z par $f_1(z) := (P_1(z_1, z_2), Q_1(z_1, z_2))$ et $f_2(z) := (\lambda P_2(z_1, z_2), \lambda Q_2(z_1, z_2))$ sont permutables pour des constantes $\lambda \neq 0$ convenables.

Exemple 1.6 Les endomorphismes holomorphes $f_1(w) := [w_{\alpha_0}^{d_1} : w_{\alpha_1}^{d_1} : w_{\alpha_2}^{d_1}]$ et $f_2(w) := [\lambda_0 w_{\nu_0}^{d_1} : \lambda_1 w_{\nu_1}^{d_1} : \lambda_2 w_{\nu_2}^{d_1}]$ sont permutables lorsque $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ et $\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$ sont des permutations de $\{0, 1, 2\}$ et λ_0, λ_1, λ_2 sont des constantes non nulles convenablement choisies.

Exemple 1.7 Les endomorphismes $f_1(z_1, z_2) := (z_1^{\pm d_1}, \pm \mathrm{T}_{d_1}(z_2))$ et $f_2(z_1, z_2) := (\lambda z_1^{\pm d_2}, \pm \mathrm{T}_{d_2}(z_2))$ sont permutables lorsque la constante $\lambda \neq 0$ et les signes $\pm$ sont convenablement choisis.

Exemple 1.8 Les endomorphismes $f_i(z_1, z_2) := (\pm \mathrm{T}_{d_i}(z_1), \pm \mathrm{T}_{d_i}(z_2))$ ou $(\pm \mathrm{T}_{d_i}(z_2), \pm \mathrm{T}_{d_i}(z_1))$ sont permutables lorsque les signes $\pm$ sont convenablement choisis.

Exemple 1.9 Soient h_1, h_2 deux endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{P}^1$. Soit π l'application holomorphe de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ qui définit un revêtement ramifié à deux feuillets tel que $\pi(x, y) = \pi(y, x)$. Posons

$F_i(a,b) := (h_i(a), h_i(b))$ deux endomorphismes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Il existe des endomorphismes holomorphes permutables f_i de $\mathbb{P}^2$ tels que $f_i \circ \pi = \pi \circ F_i$. Lorsque les h_i sont des polynômes, f_1, f_2 sont polynomiaux. Lorsque les h_i sont des applications des Lattès, on obtient un cas particulier de l'exemple 1.10.

Exemple 1.10 Dans le contexte du théorème 1.1, lorsque $\mathcal{A}$ est un groupe cristallographique complexe (c'est-à-dire un groupe co-compact d'isométries complexes de $\mathbb{C}^k$), on dite que f_1 et f_2 sont des *applications de Lattès généralisées*. Lorsque $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$ modulo $\mathcal{A}$, les applications f_1 et f_2 sont permutables. Certains sous-familles d'applications de Lattès généralisées sont précisement décrites dans [3].

Nous obtenons le corollaire suivant qui généralise le résultat principal de [7]:

Corollaire 1.11 *Sous l'hypothèse du théorème 1.1, si $k = 2$, le couple (f_1, f_2) est égal, dans un système de coordonnées convenable de $\mathbb{P}^2$, à l'un des couples décrits dans les exemples précédents.*

Remarque 1.12 Le même problème pour les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ est résolu par Lamy [14]. Veselov [23] a donné aussi une liste d'applications polynomiales permutables dites *applications de Tchebychev*.

Notre approche est semblable à celle adoptée par Fatou, Julia et Eremenko à une variable.

Soient f_1, f_2 deux endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^k$ de degré algébrique respectifs d_1 et d_2. On montre à l'aide d'un résultat de Briend-Duval [4] qu'ils ont une infinité de points périodiques répulsifs communs. Supposons pour simplifier que $f_1(a) = f_2(a) = a$ soit un tel point. On montre qu'il existe une application (de Poincaré) $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k$ telle que $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0)$ inversible et

$$f_i \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_i$$

où les Λ_i sont des applications triangulaires. Le problème est d'analyser les applications Λ_i. Pour cela nous utilisons systématiquement la fonction de Green commune associée aux deux applications f_i. On montre que sous

l'hypothèse (3) le groupe de Lie Γ engendré par Λ_1, Λ_2 contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}$. Sous l'hypothèse (2), si $d_1^{n_1} = d_2^{n_2}$ pour certains entiers strictement positifs n_1, n_2 alors ce groupe contient un sous-groupe compact non discret. Après avoir observé que f_1 et f_2 ont même mesure d'équilibre μ, de support J_k, on montre sous l'hypothèse (3) que J_k contient un ouvert qui est une variété réelle analytique. En effet, J_k est "laminé" par les images des orbites de Γ (par l'application φ) et on peut fabriquer des "laminations" différentes grâce à des points périodiques communs différents. On est donc amené à étudier la structure d'un endomorphisme f de $\mathbb{P}^k$ pour lequel le support J_k de la mesure d'équilibre contient un ouvert $J_k \cap \Omega$ qui est une variété réelle analytique. C'est ce que nous faisons au paragraphe 5.

On considère une application de Poincaré φ associée à un point fixe répulsif $b \in J_k \cap \Omega$ vérifiant $\varphi(0) = b$, $\varphi'(0)$ inversible et satisfaisant l'équation

$$f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda.$$

On étudie alors les résonnances possibles entre les valeurs propres de $\Lambda'(0)$. Si f est de degré d, on montre que ces valeurs propres sont égales à $\pm d$ ou de module $\sqrt{d}$. On en déduit que $J^* := \varphi^{-1}(J_k)$ admet des équations de la forme

$$\mathrm{Im} z'' = q(z', \overline{z}') \text{ avec } z' \in \mathbb{C}^n, z'' \in \mathbb{C}^{k-n}$$

où q est une application polynomiale homogène de degré deux.

On montre ensuite que si g est un germe d'application holomorphe vérifiant $\varphi \circ g = \varphi$ alors g se prolonge en application affine. Nous utilisons pour cela l'analyse de la fonction $G^* := G \circ \varphi$ où G est la fonction de Green associée à f. L'une des difficultés pour montrer ce résultat et construire le groupe $\mathcal{A}$, est que G^* n'est pas différentiable et qu'il faut analyser les directions où elle l'est dans un sens faible. Ces outils mis en place on peut construire un orbifold associé à l'application f comme au corollaire 1.3.

On le voit que les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré d_1 qui sont permutables à un endomorphisme de degré d_2 avec $d_1^{n_1} \neq d_2^{n_2}$ pour tout $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$ sont assez rigides et rares.

2 Germes d'applications holomorphes

Dans ce paragraphe, nous démontrons que les germes d'applications holomorphes permutables sont λ-triangulaires dans un système de coordonnées

convenables lorsque 0 est un point fixe répulsif pour l'un d'eux. Ce résultat généralise un résultat similaire sur la triangulation des matrices permutables.

Notons $\mathcal{G}$ le semi-groupe des germes d'applications holomorphes de $(\mathbb{C}^k, 0)$ dans $(\mathbb{C}^k, 0)$. Notons $\mathcal{G}^\times$ (resp. $\mathcal{G}^*$) le semi-groupe (resp. groupe) des germes d'applications holomorphes à *fibres discrètes* (resp. inversibles) de $(\mathbb{C}^k, 0)$ dans $(\mathbb{C}^k, 0)$. Soit $g \in \mathcal{G}$. On dit que g est *triangulaire* si g est inversible et s'il est de la forme

$$g(z) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2 + P_2(z), \ldots, \lambda_k z_k + P_k(z))$$

où pour tout $2 \leq j \leq k$ le polynôme P_j est une combinaison linéaire de monômes $z_1^{\alpha_1} \ldots z_{j-1}^{\alpha_{j-1}}$ dont le multi-indice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ satisfait la relation $\lambda_j = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_{j-1}^{\alpha_{j-1}}$. On dit que 0 est un point *répulsif* pour g ou que g est *dilatant* si toute valeur propre de $g'(0)$ est de module supérieur à 1. D'après le théorème de Sternberg [21], pour tout $g \in \mathcal{G}$ dilatant, il existe $\varphi \in \mathcal{G}^*$ tel que $\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ soit triangulaire. Si g est triangulaire et dilatant nous pouvons supposer que $1 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_k|$.

Soit $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^*)^k$. Un polynôme $P(z)$ est dit λ-*homogène* d'ordre j s'il est combinaison linéaire de monômes $z_1^{\alpha_1} \ldots z_k^{\alpha_k}$ vérifiant $\lambda_j = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_k^{\alpha_k}$. Il s'agit donc des polynômes qui vérifient $P(\lambda z) = \lambda_j P(z)$ où $\lambda z := (\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_k z_k)$. Un élément $h = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathcal{G}$ est dit λ-*triangulaire* si h_j est λ-homogène d'ordre j pour tout $1 \leq j \leq k$. Autrement dit les monômes qui interviennent dans l'écriture de h sont ceux donnés par les résonnances de λ. Notons $\mathcal{G}_\lambda$ (resp. $\mathcal{G}_\lambda^*$) l'ensemble des éléments λ-triangulaires de $\mathcal{G}$ (resp. de $\mathcal{G}^*$). On vérifie sans peine que si $|\lambda_j| > 1$ pour tout $1 \leq j \leq k$, le semi-groupe $\mathcal{G}_\lambda$ est un espace complexe de dimension finie et le groupe $\mathcal{G}_\lambda^*$ admet une structure naturelle de groupe de Lie. En effet il y a seulement un nombre fini de résonnances.

Proposition 2.1 *Soient g_1 et g_2 deux éléments permutables de $\mathcal{G}^\times$. Supposons que 0 soit répulsif pour g_1. Alors g_2 est inversible.*

Preuve— Quitte à remplacer g_2 par $g_1^m \circ g_2$ pour m suffisamment grand, on peut supposer que les valeurs propres non nulles de $g_2'(0)$ sont de module plus grand que 1. Ceci est bien clair dans un système de coordonnées où les matrices permutables $g_1'(0)$ et $g_2'(0)$ sont triangulaires. Supposons que $g_2'(0)$ ne soit pas inversible. Soit V la variété stable de g_2, c'est-à-dire $V := \{z |\ \lim_{n\to\infty} g_2^n(z) = 0\}$ [16, p.27]. Comme $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, $g_1(V)$ est également stable par g_2. D'où $V = g_1(V)$. Quitte à remplacer g_i par $g_i|_V$, on

peut supposer que les valeurs propres de $g_2'(0)$ sont nulles. En remplaçant g_2 par g_2^m avec m suffisamment grand, on peut supposer que $g_2'(0) = 0$. D'après le théorème de Sternberg, on peut supposer que g_1 est triangulaire. Comme g_2 est à fibres discrètes, $g_2(0, \ldots, 0, z_k)$ n'est pas constant. La relation $g_2 = g_1^{-1} \circ g_2 \circ g_1$ entraîne $g_2(0, \ldots, 0, z_k) = g_1^{-1} \circ g_2(0, \ldots, 0, \lambda_k z_k)$ où les λ_j sont les éléments de la diagonale principale de $g_1'(0)$. On peut supposer que $1 \leq |\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_k|$. Notons h_j les fonctions coordonnées de $g_2(0, \ldots, 0, z_k)$. Soit h_s la première fonction non nulle. Alors $h_s(z_k) = \lambda_s^{-1} h_s(\lambda_k z_k)$. Si l'on considère la série de Taylor de h_s, la relation précédente contredit le fait que $h_s \neq 0$, $h_s(0) = h_s'(0) = 0$ et $1 < |\lambda_s| \leq |\lambda_k|$.

$\square$

Proposition 2.2 *Soient g_1 et g_2 deux éléments permutables de $\mathcal{G}^\times$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de $g_1'(0)$ rangés dans l'ordre de croissance de leurs modules. Posons $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Supposons que 0 soit répulsif pour g_1. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{G}^*$ (dite application de Poincaré) tel que $\varphi^{-1} \circ g_i \circ \varphi$ appartienne à $\mathcal{G}_\lambda^*$ pour $i = 1$ ou 2.*

Preuve— D'après la proposition 2.1, g_2 est inversible. Comme $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, les matrices $g_1'(0)$ et $g_2'(0)$ commutent. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que les matrices $g_i'(0)$ sont triangulaires. De plus, on peut supposer que les éléments de la diagonale principale de $g_1'(0)$ sont λ_1, ..., λ_k. D'après le théorème de Sternberg, on peut supposer que g_1 est λ-triangulaire. Il suffit maintenant de montrer que g_2 l'est aussi. On peut écrire $g_1(z) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2 + P_2, \ldots, \lambda_k z_k + P_k)$ où P_j est un polynôme λ-homogène d'ordre j en z_1, ..., z_{j-1}. Posons $g_2 = (h_1, \ldots, h_k)$. Soit s l'entier maximal tel que h_j soit λ-homogène d'ordre j pour tout $1 \leq j \leq s-1$. Montrons que $s = k+1$. Supposons que $s \leq k$. La relation $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ entraîne

$$h_s(\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_k z_k + P_k) = \lambda_s h_s + P_s(h_1, \ldots, h_{s-1}).$$

Soit h la somme des termes dans le développement de Taylor de h_s qui ne sont pas λ-homogènes d'ordre s. Le choix de s entraîne que $h \neq 0$ et que $P_s(h_1, \ldots, h_{s-1})$ est λ-homogène d'ordre s. On déduit de l'équation ci-dessus que $h \circ g_1 = \lambda_s h$. Posons $\Lambda(z) := (\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_k z_k)$. Comme $g_1 \circ \Lambda = \Lambda \circ g_1$, on a $h \circ \Lambda^n \circ g_1 = \lambda_s h \circ \Lambda^n$ pour tout entier relatif n. On choisit un monôme $z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k}$ dont le coefficient dans h soit non nul et tel que $c := |\lambda_1^{n_1} \ldots \lambda_k^{n_k}|$ soit minimal pour cette propriété. Il existe alors une suite croissante d'entiers

positifs $\{k_j\}$ telle que $c^{k_j} h \circ \Lambda^{-k_j}$ tende vers un polynôme non nul P. On a donc $P \circ g_1 = \lambda_s P$. Soit $z_1^{m_1} \ldots z_k^{m_k}$ le terme dominant de P, c'est-à-dire pour tout terme $z_1^{s_1} \ldots z_k^{s_k}$ de P il existe $1 \leq j \leq k$ vérifiant $s_j < m_j$ et $s_i = m_i$ lorsque $i > j$. En identifiant les coefficients de $z_1^{m_1} \ldots z_k^{m_k}$ dans $P \circ g_1 = \lambda_s P$ on obtient $\lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_k^{m_k} = \lambda_s$. Ceci contredit la définition de h.

$\square$

Le lemme suivant sera utilisé pour prouver que f_1 et f_2 possèdent une infinité de points périodiques répulsifs communs.

Lemme 2.3 *Soient f, g et h trois éléments de $\mathcal{G}^\times$ vérifiant $f \circ h = h \circ g$. Si le point 0 est répulsif pour g alors il est répulsif pour f.*

Preuve— Fixons un voisinage assez petit V de 0 et un $n \geq 1$ tels que $\overline{V} \subset g^n(V)$. Posons $U := h(V)$. Comme h est à fibres discrètes, U est un ouvert. La relation $f^n \circ h = h \circ g^n$ entraîne $\overline{U} \subset f^n(U)$. Cela entraîne que 0 est répulsif pour f.

$\square$

3 Applications de Poincaré

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques outils de la théorie des systèmes dynamiques holomorphes: la fonction de Green, les courants invariants, les ensembles de Julia. On pourra trouver un exposé détaillé dans [18]. Nous allons démontrer que f_1 et f_2 possèdent une infinité de points périodiques répulsifs communs au voisinage desquels des itérés de f_1 et f_2 sont triangulables. L'application de Poincaré représente le changement de coordonnées locales rendant des itérés de f_1 et f_2 triangulaires. Cette application se prolonge holomorphiquement en une application de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{P}^k$. L'image réciproque de la fonction de Green commune de f_1 et f_2 par l'application de Poincaré est invariante par les applications triangulées.

Notons $[w_0 : w_1 : \cdots : w_k]$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^k$ et posons $z_s := w_s/w_0$ pour $s = 1, \ldots, k$. Soit f un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ de $\mathbb{P}^k$. Un *relevé* de f est une application polynomiale homogène $F : \mathbb{C}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{k+1}$ vérifiant $F^{-1}(0) = \{0\}$ et $\pi \circ f = F \circ \pi$ où π est l'application canonique de $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}^k$. L'application F est définie à une constante multiplicative près.

La suite de fonctions $d^{-n}\log\|F^n(w)\|$ converge vers une fonction continue, plurisousharmonique G qu'on appelle *la fonction de Green*. Cette fonction vérifie $G\circ F = dG$ et $G(\lambda z) = \log|\lambda| + G(w)$. De plus, toute fonction v vérifiant ces propriétés est telle que $v \leq G$. On peut définir un courant positif fermé T de bidegré $(1,1)$ de $\mathbb{P}^k$ par la relation $\pi^*T := dd^cG$. C'est un courant de masse 1, invariant par f: $f^*T = d.T$.

Pour tout $1 \leq s \leq k$, on appelle *ensemble de Julia d'ordre s* le support J_s du courant $T^s := T\wedge\ldots\wedge T$ qui est un courant positif fermé de bidegré (s,s). Notons $\mu := T^k$ la mesure de probabilité invariante de f, dite *mesure d'équilibre*. Les ensembles de Julia ne sont pluripolaires dans aucun ouvert qui les rencontre.

Théorème 3.1 (Fornaess-Sibony [18]) *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. La mesure μ, dite mesure d'équilibre satisfaisant l'équation $f^*\mu = d^k\mu$. Il existe un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}^*$ tel que pour $a \notin \mathcal{E}^*$ les mesures*

$$\mu_n^a := \frac{1}{d^{kn}} \sum_{f^n(a_i)=a} \delta_{a_i}$$

convergent vers μ où on a noté δ_{a_i} la masse de Dirac en a_i.

Théorème 3.2 (Briend-Duval [4]) *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Soit A_n l'ensemble des points périodiques répulsifs d'ordre n de f. Alors les mesures*

$$\frac{1}{d^{kn}} \sum_{a_i\in A_n} \delta_{a_i}$$

convergent vers μ. En particulier, les points périodiques répulsifs de f sont denses dans J_k.

Lorsque f est polynomiale, c'est-à-dire si f est aussi un endomorphisme de $\mathbb{C}^k = \mathbb{P}^k \setminus \{w_0 = 0\}$, on peut définir le taux d'échappement vers l'infini des orbites de f (notée encore G et appelé aussi *fonction de Green*) $G(z) := \lim_{n\to\infty} d^{-n}\log^+\|f^n(z)\|$. C'est une fonction continue, plurisouharmonique, à croissance logarithmique à l'infini (l'abus de notation ne prête pas à confusion). Cette fonction est égale à la restriction de la fonction de Green

définie précédemment, à l'hyperplan $\{w_0 = 1\}$ de $\mathbb{C}^{k+1}$ (ici l'application F est choisie de sorte que sa première fonction coordonnée soit égale à w_0^d). Dans ce cas, on a $T = dd^cG$. Notons que les zéros de cette fonction sont les points d'orbite bornée. En particulier, G s'annule aux points périodiques.

Dans la suite de ce paragraphe, on note f_1, f_2 deux endomorphismes holomorphes permutables de degrés $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ de $\mathbb{P}^k$. Soient F_1 et F_2^* des relevés de f_1 et f_2. La relation $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ entraîne $F_1 \circ F_2^* = \lambda F_2^* \circ F_1$ avec $\lambda \neq 0$. Posons $F_2 = \theta F_2^*$ avec $\theta^{d_1-1} = \lambda$. L'application F_2 est un relevé de f_2. On vérifie facilement que $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$. On note G_1, G_2 les fonctions de Green de f_1, f_2 définies grâce à F_1 et F_2.

Proposition 3.3 *Soient f_1 et f_2 deux endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{P}^k$. On a alors $G_1 = G_2$. En particulier, les ensembles de Julia d'ordre s de f_1 et f_2 sont égaux pour tout $1 \leq s \leq k$.*

Preuve— Considérons les fonctions $H_n := d_2^{-n} G_1 \circ F_2^n$. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes:

1. $H_n \circ F_1 = d_1 H_n$.

2. $H_n(\lambda z) = \log|\lambda| + H_n(z)$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Par conséquent, $H_n \leq G_1$. La fonction $L(z) := G_1(z) - \log\|z\|$ est bornée car G_1 est continue et $G_1(\lambda z) = \log|\lambda| + G(z)$. On déduit facilement de la relation $H_n(z) = d_2^{-n}\log\|F_2^n(z)\| + d_2^{-n} L \circ F_2^n(z)$ que H_n tend vers G_2 lorsque n tend vers l'infini. Par suite $G_2 \leq G_1$. On montre de même que $G_1 \leq G_2$.

$\square$

Lemme 3.4 *Les endomorphismes f_1 et f_2 possèdent une infinité de points périodiques communs qui sont répulsifs pour f_1. De plus, si a est un point périodique répulsif pour f_1, alors il existe un entier $m \geq 0$ tel que $f_2^m(a)$ soit périodique répulsif pour f_1 et périodique pour f_2.*

Preuve— Soit a un point périodique répulsif d'ordre n de f_1. Comme $f_1^n \circ f_2 = f_2 \circ f_1^n$, $b := f_2(a)$ est périodique d'ordre s pour f avec $s|n$. D'après le lemme 2.3 appliqué à $f(z) := f_1^n(z+b)-b$, $g(z) := f_1^n(z+a)-a$ et $h(z) := f_2(z+a)-b$, le point b est répulsif pour f_1.

Notons pour tout n, A_n l'ensemble des points périodiques répulsifs d'ordre n pour f_1. Alors l'ensemble fini $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est invariant par f_2. Par conséquent, il existe un m tel que $f_2^m(a)$ soit périodique pour f_2.

Pour tout nombre premier n, l'ensemble fini $A_1 \cup A_n$ est invariant par f_2. Par conséquent, pour n premier suffisamment grand, A_n est invariant par f_2. D'après le Théorème 3.2, A_n est non vide pour n suffisamment grand. On en déduit qu'il existe au moins un point périodique a_n de f_2 appartenant à A_n. Il est clair que l'ensemble de tels points est infini.

$\square$

Nous dirons qu'une application $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ est *rigide* s'il existe une application linéaire $l : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{k-1}$ telle que pour tout $u \in \mathbb{C}^{k-1}$ l'image de $l^{-1}(u)$ par φ soit une droite complexe passant par 0.

Proposition 3.5 *Soit f un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ de $\mathbb{P}^k$. Soit b un point fixe répulsif pour f. Alors il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k$ (dite l'application de Poincaré) et une application triangulaire Λ telles que $\varphi(0) = b$, $\varphi'(0)$ inversible et $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda$. De plus, $\mathbb{P}^k \setminus \varphi(\mathbb{C}^k)$ est un fermé pluripolaire. Si f est polynomiale on a $G^* \circ \Lambda = dG^*$ où $G^* := G \circ \varphi$. Si f est polynomiale homogène, φ est rigide.*

Preuve— D'après le théorème de Sternberg, il existe une application holomorphe φ d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{P}^k$ telle que $\varphi(0) = b$, $\varphi'(0)$ inversible et telle que $\Lambda := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ soit triangulaire. On a également $\varphi \circ \Lambda^n = f^n \circ \varphi$ pour tout $n \geq 1$. Comme b est répulsif pour f, Λ est dilatante. Par conséquent, l'application φ se prolonge en une application holomorphe de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{P}^k$ en posant $\varphi(z) := f^n \circ \varphi \circ \Lambda^{-n}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^k$ et pour un n suffisamment grand. On vérifie sans peine que la définition ne dépend pas de n.

Il en résulte que si $z \notin \varphi(\mathbb{C}^k)$, l'ensemble $\overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z)}$ ne contient pas b. En particulier, la mesure μ_n^z du théorème 3.1 ne tend pas vers μ quand $n \to +\infty$. Par conséquent, $\mathbb{P}^k \setminus \varphi(\mathbb{C}^k)$ est pluripolaire; il est fermé car φ est ouverte.

Si f est polynomiale on a $G \circ f = dG$. D'où

$$G^* \circ \Lambda = G \circ \varphi \circ \Lambda = G \circ f \circ \varphi = dG \circ \varphi = dG^*$$

Supposons maintenant que f soit polynomiale homogène. Sans perte de généralité, on peut supposer que $b = (0, ..., 0, 1)$. Posons $f = (P_1, \ldots, P_k)$. L'application $h := [P_1 : \cdots : P_k]$ définit un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^{k-1}$ et $b' := [0 : \cdots : 0 : 1]$ est un point fixe de h. Posons $u_m := z_m/z_k$ pour $m = 1, \ldots, k-1$. Alors $u' := (u_1, \ldots, u_{k-1})$ est un système de coordonnées affines de $\mathbb{P}^{k-1}$. On a $h(u') = (R_1, \ldots, R_{k-1})$ au voisinage de b' où $R_m :=$

$P_m(u',1)/P_k(u',1)$. Posons $u_k := d\log z_k + \log P_k(u',1)/(d-1)$. On vérifie facilement que $u := (u', u_k)$ est un système de coordonnées d'un voisinage de b. On a également $f(u) = (h(u'), du_k)$. D'après la partie précédente appliquée à h en b', il existe une application $\varphi_h : \mathbb{C}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{k-1}$ telle que $\varphi_h^{-1} \circ h \circ \varphi_h$ soit triangulaire. Soit $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ définie par $\varphi(z', z_k) := (\varphi_h(z'), z_k)$. Alors $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ est triangulaire. Il est clair que φ est rigide pour l'aplication $l : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{k-1}$ avec $l(z) := z'$.

□

Proposition 3.6 *Soient f_1, f_2 deux endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$ de fonction de Green commune G. Soit a un point fixe commun à f_1, f_2 répulsif pour f_1. Soient λ_1, ..., λ_k les valeurs propres de $f_1'(a)$ rangées dans l'ordre croissant de leurs modules. Alors il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k$ et des applications permutables $\Lambda_i \in \mathcal{G}_\lambda^*$ telles que $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0)$ inversible et $f_i \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_i$ où $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. De plus, $\mathbb{P}^k \setminus \varphi(\mathbb{C}^k)$ est un fermé pluripolaire. Si les f_i sont polynomiales on a, $G^* \circ \Lambda_i = d_i G^*$ où $G^* := G \circ \varphi$. Si les f_i sont polynomiales homogènes, φ est rigide.*

Preuve— D'après la proposition 2.2, il existe une application holomorphe φ d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{P}^k$ telle que $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0)$ soit inversible et $\varphi^{-1} \circ f_i \circ \varphi$ soient λ-triangulaires. Posons $\Lambda_i := \varphi^{-1} \circ f_i \circ \varphi$.

Comme dans la proposition 3.5, on montre que φ se prolonge en une application holomorphe de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{P}^k$ et que $\mathbb{P}^k \setminus \varphi(\mathbb{C}^k)$ est un fermé pluripolaire. De plus $G^* \circ \Lambda_i = d_i G^*$ si les f_i sont polynomiales. Lorsque les f_i sont polynomiales homogènes, on peut choisir comme dans la proposition 3.5 une application φ rigide.

□

Remarque 3.7 Notons $T^* := dd^c G^*$, $\mu^* := (T^*)^k$ et J_s^* le support de $(T^*)^s$ pour tout $1 \leq s \leq k$. On a $J_s^* = \varphi^{-1}(J_s)$, $(T^*)^s = \varphi^*(T^s)$, $\mu^* = \varphi^*(\mu)$, $\Lambda_i^{\pm 1}(J_s^*) = J_s^*$ et $\Lambda_i^*((T^*)^s) = d_i^s (T^*)^s$.

4 Laminations de la mesure d'équilibre

Nous supposons dans ce paragraphe que f_1 et f_2 sont deux applications polynomiales permutables de $\mathbb{C}^k$ qui se prolongent en des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$. Nous montrons sous l'hypothèse du théorème 1.1 qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. $J_k \cap \Omega$ est une sous-variété réelle analytique non vide de Ω.

2. Il existe une forme réelle analytique ϕ de degré maximal définie sur $J_k \cap \Omega$ telle que $\mu = \phi \wedge [J_k]$ dans l'ouvert Ω.

Sous l'hypothèse de la proposition 3.6, on montrera que a est réplusif pour f_2 et que le groupe fermé engendré par les automorphismes Λ_1 et Λ_2 contient un sous-groupe multiplicatif à un paramètre réel. Par conséquent, l'ensemble $J^* := \varphi^{-1}(J_k)$ est "laminé" par les courbes réelles analytiques qui sont des orbites de ce sous-groupe. On obtient la première partie grâce à l'utilisation des laminations obtenues par des points périodiques différents. La deuxième partie se déduit également en utilisant la structure laminée de la mesure μ. Cette approche est celle d'Eremenko en dimension 1 [8].

Lemme 4.1 *Soit $\{g_n\}$ une famille non équicontinue de germes d'applications holomorphes définies au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{P}^m$. Alors il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^k$, une suite de nombres complexes $\{z_i\}$ tendant vers 0, une suite de nombres réels positifs $\{\rho_i\}$ tendant vers 0 et une suite croissante d'entiers positifs $\{n_i\}$ tels que $g_{n_i}(z_i v + \rho_i \xi v)$ tende vers une application holomorphe non constante $h(\xi)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^m$.*

Preuve— Montrons d'abord qu'il existe une droite L passant par 0 telle que la famille $\{g_{n|L}\}$ ne soit pas équicontinue en 0. Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour toute droite L passant par 0, la famille $\{g_{n|L}\}$ est équicontinue en 0. Notons $\mathcal{F}$ la famille des droites complexes passant par 0. On peut supposer que $g_n(0) = 0$ pour tout n. Soit U un voisinage suffisamment petit de 0. Alors pour toute droite L il existe r_L rationnel positif tel que pour tout n l'image de $L \cap \{\|z\| \leq r_L\}$ par g_n soit contenue dans U. Par conséquent, il existe un $r > 0$ et une famille non pluripolaire $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tels que pour tout n et pour toute $L \in \mathcal{F}'$ l'image de $L_r := L \cap \{\|z\| \leq r\}$ par g_n soit contenue dans U. Il existe une constante M telle que $\|g_n(z)\| \leq M$ pour tout $z \in L_r$ et pour tout n. D'après [19, 1], l'enveloppe polynomialement convexe de $\overline{\bigcup_{L \in \mathcal{F}'} L \cap \{\|z\| \leq r\}}$ contient un voisinage de 0. Alors il existe $r' > 0$ tel que $\|g_n(z)\| \leq M$ pour tout n et tout $|z| \leq r'$. D'après le théorème de Montel, la famille $\{g_n\}$ est équicontinue en 0. C'est la contradiction recherchée.

Soit L une droite passant par 0 telle que la famille $\{g_{n|L}\}$ ne soit pas équicontinue en 0. Soit $v \in L$ un vecteur non nul. Posons $h_n(\xi) := g_n(\xi v)$. Alors la famille $\{h_n\}$ n'est pas équicontinue en 0. Il faut montrer qu'il existe $\{n_i\}$, $\{z_i\}$, $\{\rho_i\}$ et h tels que $h_{n_i}(z_i + \rho_i \xi)$ tende vers h. Ceci dans le cas

où $m = 1$ est un lemme dû à Zalcman [17]. La preuve au cas où $m \geq 2$ se déroule exactement de la même manière.

$\square$

Lemme 4.2 *Soit* $A_c := \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 |\ d_1^m d_2^n \leq c\}$ *où* c *est une constante. Alors sous l'hypothèse de la proposition 3.6, la famille des* $\Lambda_1^m \circ \Lambda_2^n$ *avec* $(m,n) \in A_c$ *est un sous-ensemble borné de* $\mathcal{G}_\lambda$.

Preuve— On peut se limiter au cas où f_1 et f_2 sont des endomorphismes polynomiaux. Supposons que les coefficients de $\Lambda_1^m \circ \Lambda_2^n$ ne soient pas bornés. Alors l'ensemble de telles applications n'est pas équicontinue. D'après le lemme 4.1, il existe des entiers relatifs m_i, n_i, un vecteur non nul v, des suites $\{z_i\}$ et $\{\rho_i\}$ tendant vers 0 tels que $d_1^{m_i} d_2^{n_i} \leq c$ et tels que $\Lambda_1^{m_i} \circ \Lambda_2^{n_i}(z_i v + \rho_i \xi v)$ tende vers une application holomorphe non constante $h(\xi)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^k$. Comme G^* est continue, on a

$$G^*(h(\xi)) = \lim G^*(\Lambda_1^{m_i} \circ \Lambda_2^{n_i}(z_i v + \rho_i \xi v)) = \lim d_1^{m_i} d_2^{n_i} G^*(z_i v + \rho_i \xi v) = 0.$$

En effet, $G^*(0) = 0$, $d_1^{m_i} d_2^{n_i} \leq c$ et z_i, ρ_i tendent vers 0. La fonction G s'annulle donc sur $\varphi(h(\mathbb{C}))$. Or l'ensemble de zéros de G est un compact de $\mathbb{C}^k$; il ne peut donc contenir une image holomorphe de $\mathbb{C}$.

$\square$

Corollaire 4.3 *Soient* f_1, f_2 *deux endomorphismes satisfaisant l'hypothèse de la proposition 3.6. Supposons de plus que les suites d'itérés de* f_1 *et* f_2 *soient disjointes. Alors le groupe d'automorphismes polynomiaux de* $\mathbb{C}^k$ *engendré par* Λ_1 *et* Λ_2 *n'est pas discret. Le groupe fermé engendré par* Λ_1 *et* Λ_2 *contient un sous-groupe additif à un paramètre réel* $\{\Lambda^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ *vérifiant* $G^* \circ \Lambda^t = \exp(ct) G^*$ *où* $c = 1$ *si* $d_1^{n_1} \neq d_2^{n_2}$ *pour tout* $(n_1, n_2) \neq (0,0)$ *et* $c = 0$ *sinon. De plus si* $c = 1$ *on a* $\lim_{t \to -\infty} \Lambda^t = 0$.

Preuve— Soient m_i, n_i des entiers relatifs vérifiant $\lim d_1^{m_i} d_2^{n_i} = 1$, $0 < m_i < m_{i+1}$ et $0 > n_i > n_{i+1}$ pour tout i. Les suites d'itérés de f_1 et f_2 étant disjointes, les germes $f_1^{m_i} \circ f_2^{n_i}$, définis au voisinage de a, sont deux à deux différents. L'application de Poincaré étant la même, les automorphismes $\Lambda_1^{m_i} \circ \Lambda_2^{n_i}$ sont donc deux à deux différents. D'après le lemme 4.2, cette suite est bornée dans $\mathcal{G}_\lambda$, donc elle a des points d'accumulation et n'est pas

discrète. De même la suite $\Lambda_1^{-m_i} \circ \Lambda_2^{-n_i}$ est auusi bornée. On en déduit que les points d'accumulation de ces deux suites sont inversibles. Par conséquent, le groupe d'automorphismes engendré par Λ_1 et Λ_2 n'est pas discret.

Notons Γ le groupe fermé engendré par Λ_1 et Λ_2. C'est un sous-groupe de $\mathcal{G}_\lambda^*$ qui est un groupe de Lie commutatif de dimension finie. Par conséquent, Γ est un sous-groupe de Lie. Soit Γ_0 la composante de l'identité. On a $\dim \Gamma_0 \geq 1$. Par conséquent, Γ_0 contient un sous-groupe à un paramètre $(\Lambda^t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Considérons l'application $\Psi : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation $G^* \circ \Lambda = \exp(\Psi(\Lambda))G^*$ pour tout $\Lambda \in \Gamma_0$. C'est un morphisme de groupes de Lie.

Si le groupe Γ_0 est compact, l'ensemble $\Psi(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. Or l'image de Ψ contient l'ensemble $\{m \log d_1 + n \log d_2 \text{ avec } (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Si cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$, c'est le cas si $\log d_2 / \log d_1$ est irrationnel, alors Ψ est surjective et on peut choisir un sous-groupe $(\Lambda^t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur lequel Ψ est surjective.

Posons $\alpha(t) := \Psi(\Lambda^t)$. On a $\alpha(t + t') = \alpha(t)\alpha(t')$. Il existe donc un $c \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(t) = \exp(ct)$. Si $d_1^{n_1} \neq d_2^{n_2}$ pour tout $(n_1, n_2) \neq (0,0)$, on a $\log d_2 / \log d_1$ irrationnel et donc $c \neq 0$. Le changement de paramètre $t \mapsto t/c$ permet de prendre $c = 1$. Dans le cas contraire, Ψ n'est pas surjectif et nécessairement $c = 0$.

Supposons que $c = 1$. Notons $\Lambda \in \mathcal{G}_\lambda$ une valeur adhérente de la famille $\{\Lambda^t\}$ pour $t \to -\infty$. Par continuité de G^*, la relation $G^* \circ \Lambda^t = \exp(t)G^*$ implique que $G^* \circ \Lambda = 0$. Comme G^* ne peut s'annuler sur aucune image holomorphe non constante de $\mathbb{C}$, on a nécessairement $\Lambda = 0$.

$\square$

Nous allons introduire une notion de lamination adaptée à nos besoins. Soit X une variété réelle analytique de dimension n et soit $J \subset X$ un fermé et $b \in X$. On dit que J est *m-laminé* en b s'il existe un voisinage U de b muni des coordonnées réelles analytiques $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ tels que $\Omega = U \times V$, $J \cap \Omega = U \times K$ où U (resp. V) est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^{n-m}$) et K est un fermé de V. Par définition, si J est m-laminé en b, il est m-laminé en tout point d'un voisinage de b.

Notons $\pi : \Omega = U \times V \longrightarrow V$ la projection de Ω dans V. Soit G une fonction réelle non négative définie sur X. On dit que dans Ω, l'application π *lamine* G s'il existe une fonction réelle positive δ définie sur un intervalle $[0, \epsilon[$, tendant vers 1 en 0, telle que pour tout $v \in V$ la restriction G_v de G

dans $U \times \{v\}$ soit réelle analytique et $G_v(u) \leq \delta(\|u-u'\|)G_v(u')$ pour tous $u, u' \in U$ et $\|u-u'\| < \epsilon$.

Soit μ une mesure de X. On dit que μ est *m-laminée* en b s'il existe un voisinage $\Omega = U \times V$ de b muni des coordonnées réelles analytiques locales $(u,v) = (x_1, \ldots, x_m) \times (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ tel que μ soit le produit de la mesure $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ définie sur U et d'une mesure ν définie sur V. Par définition, μ est m-laminé en tout point de Ω. On dit que G et μ sont *simultanément m-laminées* si les ouverts Ω, U et V sont les mêmes pour G et μ.

L'ensemble J (resp. μ) est *m-laminé(e)* dans un ouvert W s'il (resp. si elle) l'est en tout point $b \in W$.

D'après le corollaire 4.3, les ensembles J_s^* sont 1-laminés en tout point sauf éventuellement en 0. Par conséquent, J_s est 1-laminé en $b \in J_s \cap \varphi(\mathbb{C}^k)$ lorsque $b \neq a$ et $\varphi^{-1}(b)$ n'est pas contenu dans l'ensemble critique de φ. L'ensemble des points b qui ne vérifient pas ces deux propriétés, est un fermé pluripolaire (*voir* la proposition 3.5).

Proposition 4.4 *Soient f_1 et f_2 deux endomorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{C}^k$ qui se prolongent en des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$. Supposons que $d_1^{n_1} \neq d_2^{n_2}$ pour tous $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$. Alors il existe un ouvert $\Omega = U \times V \subset \mathbb{C}^k$ muni des coordonnées réelles analytiques $(x_1, \ldots, x_m) \times (x_{m+1}, \ldots, x_{2k})$ tel que $J_k \cap \Omega = U \times \{0\}$, $\mu = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge [J_k]$ dans Ω. De plus la projection π de Ω dans V lamine la fonction G et l'entier m vérifie $k \leq m < 2k$.*

Preuve— Soit m l'entier maximal tel qu'il existe un ouvert $\Omega = U \times V$, muni des coordonnées réelles analytiques $(x_1, \ldots, x_m) \times (x_{m+1}, \ldots, x_{2k})$, une mesure ν de V tels que $J_k \cap \Omega \neq \emptyset$ avec $\mu = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \otimes \nu$ dans Ω, la projection de Ω dans V lamine G. Notons K le support de ν. On a $J_k \cap \Omega = U \times K$. D'après le théorème 3.2, il existe un point $b \in J_k \cap W$ périodique répulsif pour f_1. Pour simplifier les notations, supposons que $b = (0,0)$. Si 0 est un point isolé dans K, quitte à remplacer Ω par un ouvert convenable on peut supposer que $K = \{0\}$; la proposition est alors vraie. En effet, $m \geq k$ car la variété réelle analytique $J_k \cap \Omega$ n'est pas pluripolaire et $m < 2k$ car f_1 et f_2 sont polynomiales et le support de μ ne peut contenir un ouvert [18, p.163].

Supposons maintenant que 0 ne soit pas isolé dans K. Nous en déduirons que m n'est pas maximal. L'idée est qu'on peut fabriquer une $(m+1)$-lamination à partir d'une m-lamination et d'une 1-lamination transverse à la première. La 1-lamination sera choisie grâce au corollaire 4.3.

D'après le lemme 3.4, pour un n convenable le point $a := f_2^n(b)$ est un point périodique commun pour f_1 et f_2, répulsif pour f_1. Pour simplifier les notations, on suppose que a est fixe pour f_1 et f_2. D'après le corollaire 4.3, on a $(\Lambda^t)^*(\mu^*) = \exp(kt)\mu^*$ et $G^* \circ \Lambda^t = \exp(t)G^*$. Soient Σ l'ensemble critique de f_2^n, $Y := \varphi^{-1} \circ f_2^n(\Sigma)$ et Θ un voisinage suffisamment petit de 0. On a $J^* \cap \Theta \not\subset Y$ car Y est pluripolaire où $J^* := \varphi^{-1}(J_k)$. Soient $c \in \Theta \setminus Y$ et $z \in \Omega$ vérifiant $f_2^n(z) = \varphi(c)$. Alors la mesure μ et la fonction G sont simultanément m-laminées en $\varphi(c)$ car f_2^n réalise une biholomorphisme d'un voisinage de z dans un voisinage de $\varphi(c)$ satisfaisant les relations $(f_2^n)^*(\mu) = d_2^n\mu$ et $G \circ f_2^n = d_2^n \circ G$. Par conséquent, μ^* et G^* sont simultanément m-laminées en c. De plus, lorsque c appartient à J^*, la mesure μ^* et la fonction G^* ne sont pas simultanément $(m+1)$-laminées en c car on a choisi m maximal.

Soit $x'' \in K \setminus \{0\}$ un point suffisamment proche de 0 vérifiant $U \times \{x''\} \not\subset \Sigma$. Posons $U_0 := \varphi^{-1} \circ f_2^n(U \times \{0\}) \cap \Theta$ et $U_1 := \varphi^{-1} \circ f_2^n(U \times \{x''\}) \cap \Theta$. D'après le corollaire 5.14, l'orbite de tout point $c \in U_1$ par Λ^t est une courbe réelle analytique de limite 0 quand $t \mapsto 0$. Par conséquent, l'orbite d'un point générique $c \in U_1$ coupe U_1 transversalement en c. On fixe un point $c \in J^*$ vérifiant cette propriété. On montrera que μ^* et G^* sont simultanément $(m+1)$-laminée en c, ce sera la contradiction cherchée.

On choisit un système de coordonnées réelles analytiques $(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{2k})$ d'un voisinage $\Omega_2 = U_2 \times V_2$ de c et une mesure ν^* de V_2 tels que $c = (0, 0)$ et $\mu^* = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m \otimes \nu^*$ dans Ω_2 et tels que la projection π_1 de Ω_2 dans V_2 lamine G^*. Pour tout $z \in \Omega_2$, notons γ_z l'orbite de z par Λ^t. On va montrer qu'après changement de coordonnées, on peut supposer que $\{0\} \times V_2$ est laminé par les courbes γ_z; un second changement de coordonnées les redresse et fournit une $(m+1)$-lamination.

Sans perte de généralité, on peut supposer que la droite tangente de γ_c en c est $\{y_1 = \cdots = y_m = y_{m+2} = \cdots = y_{2k} = 0\}$. Posons $L := \{y_1 = \cdots = y_{m+1} = 0\} \cap \Omega_2$ et $H := \bigcup_{z \in L} \gamma_z \cap \Omega_2$. Pour Ω_2 suffisamment petit, H est le graphe d'une application réelle analytique $h = (h_1, \ldots, h_m)$ au-dessus de V_2. Quitte à effectuer le changement de coordonnées $(y_1, \ldots, y_{2k}) \mapsto (y_1 - h_1, \ldots, y_m - h_m, y_{m+1}, \ldots, y_{2k})$ on peut supposer que $h = 0$. On identifie H à $\{0\} \times V_2$. Il suffit maintenant de montrer que ν^* et $G^*_{|H}$ sont simultanément 1-laminées. D'après le corollaire 4.3, $G^*_{|H} \circ \Lambda^t = \exp(t)G^*_{|H}$ et $(\Lambda^t)^*(\nu_H) = \exp(kt)\nu_H$ dans H pour $|t|$ assez petit. On peut trouver un système de coordonnées réelles analytiques $(u, y'_{m+2}, \ldots, y'_{2k})$ de H tel que $G^*_{|H} \circ \tau = \exp(t)G^*_{|H}$ et $\tau_t^*(\nu^*) = \exp(kt)\nu^*$ dans H pour $|t|$ assez petit où

$\tau_t(u, y'_{m+2}, \ldots, y'_{2k}) := (u + t, y'_{m+2}, \ldots, y'_{2k})$. Posons $\nu^{*\prime} := \exp(-ku)\nu^*$. Alors $\tau_t^*(\nu^{*\prime}) = \nu^{*\prime}$ dans V_2. Par conséquent, il existe une mesure σ de $\{u = 0\}$ telle que $\nu^{*\prime} = du \otimes \sigma$. D'où $\nu^* = \exp(ku)du \otimes \sigma$. Posons $y'_{m+1} := k^{-1}\exp(ku)$. Dans les coordonnées $(y'_{m+1}, \ldots, y'_{2k})$ de H, on a $\nu^* = dy'_{m+1} \otimes \sigma$. On vérifie facilement que la projection $(y'_{m+1}, \ldots, y'_{2k}) \mapsto (y'_{m+2}, \ldots, y'_{2k})$ lamine $G^*_{|H}$. On en déduit que G^* et μ^* sont simultanément $(m+1)$-laminées dans Ω_2 par l'application

$$(y_1, \ldots, y_m, y'_{m+1}, \ldots, y'_{2k}) \mapsto (y_1, \ldots, y_m, y'_{m+1}).$$

Ceci contredit le fait que m est maximal.

$\square$

5 Linéarisation et groupe $\mathcal{A}$

Dans ce paragraphe on se propose de démontrer le théorème suivant qui dans le cas où $m = 2k - 1$ et f est homogène, se réduit au théorème de Berteloot-Loeb [3]:

Théorème 5.1 *Soit f un endomorphisme polynomial de degré algébrique $d \geq 2$ de $\mathbb{C}^k$ qui se prolonge en un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$. Soient G, μ et J_k sa fonction de Green, sa mesure d'équilibre et son ensemble de Julia d'ordre maximal. Supposons qu'il existe un ouvert $\Omega = U \times V \subset \mathbb{C}^k$ muni de coordonnées réelles analytiques $(x_1, \ldots, x_m) \times (x_{m+1}, \ldots, x_{2k})$ vérifiant $J_k \cap \Omega = U \times \{0\}$, $\mu = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge [J_k]$ dans Ω et tels que la projection π de Ω dans V lamine la fonction G. Alors il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ et une application affine holomorphe Λ satisfaisant l'équation $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda$ et telles que $\varphi(\mathbb{C}^k)$ soit un ouvert de complément pluripolaire de $\mathbb{P}^k$. De plus, il existe un groupe discret d'applications affines holomorphes $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}^k$ agissant transitivement sur les fibres de φ.*

Remarque 5.2 En fait, le théorème est vrai en supposant que les coordonnées de la lamination sont de classe $\mathcal{C}^2$. Quant à l'ensemble J_k, il est réel analytique lorsqu'il est de classe $\mathcal{C}^2$. En effet, il est invariant par des applications localement triangulables. Nous nous contentons d'en donner la preuve dans le cas réel analytique car c'est ce cas que nous utilisons. On verra que grâce à la proposition 4.4, le théorème 1.1 sera prouvé de la même manière.

Esquissons les idées de la preuve. Soit $b \in J_k \cap U$ un point périodique répulsif de f. Dans un premier temps, on suppose que b est fixe pour simplifier les notations. Le fait que la période de b ne soit pas nécessairement égale à 1 sera étudié à la fin de la démonstration du théorème.

Notons $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ une application de Poincaré de f en b vérifiant $\varphi(0) = b$, $\varphi'(0)$ inversible et telle que $\Lambda := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ soit triangulaire (*voir* la proposition 3.5). On peut supposer que les éléments de la diagonale principale de Λ sont rangés selon les modules croissants. On montrera que Λ est linéaire et définie par une matrice diagonale. De plus, toute valeur propre de $\Lambda'(0)$ est égale à $\pm d$ ou égale à $\sqrt{d}$ en module. La nature des valeurs propres de Λ permettra, en utilisant l'invariance de J_k par f de montrer que $J^* := \varphi^{-1}(J_k)$ admet pour équations

$$\mathrm{Im} z'' = q(z', \overline{z}')$$

dans des coordonnées convenables $z' := (z_1, \dots , z_n)$, $z'' := (z_{n+1}, \dots , z_k)$ et $z := (z', z'')$, où q est une application polynomiale homogène de degré 2. En changeant de coordonnées on peut éliminer les termes harmoniques de q. On montre ensuite que $G^* := G \circ \varphi$ est constante sur les variétés

$$\mathrm{Im} z'' = q(z', \overline{z}') + c, \;\; c \in \mathbb{R}^{k-n}.$$

Cela permet de prouver que les biholomorphismes locaux qui permettent de passer d'un point sur la fibre de φ à un autre se prolongent en applications affines. Ces applications affines forment le groupe $\mathcal{A}$. On vérifie ensuite que $\mathcal{A}$ opère transitivement sur les fibres de φ. Pour cela, on utilise la dynamique de f sur J_k.

Commençons par quelques remarques sur la géométrie de J^*. On sait que l'ensemble $J_k \cap \Omega$ n'est pas pluripolaire, or c'est une variété réelle analytique, sa dimension m est donc supérieure ou égale à k. Posons $n := m - k$. Le sous-espace tangent complexe de J_k en un point générique $z \in J_k \cap \Omega$ est de dimension n car sinon J_k serait contenu dans une hypersurface complexe de Ω. Par continuité, on peut choisir Ω de sorte que $J_k \cap \Omega$ soit *CR-générique*, c'est-à-dire le sous-espace tangent complexe en tout point de $J_k \cap \Omega$ soit de dimension n. Cela équivaut à dire que l'espace complexe engendré par l'espace tangent de $J_k \cap \Omega$ en tout point est de dimension k. Comme f est polynomiale, J_k qui est différent de $\mathbb{C}^k$, ne contient aucun ouvert de $\mathbb{C}^k$ [18, p.163] et par suite $n < k$.

Notons H l'espace tangent réel à J^* en 0 et L l'espace tangent complexe de J^* en 0. Dans un voisinage de 0, J^* est une sous-variété réelle

analytique. Comme J^* est invariant par l'automorphisme dilatant Λ, c'est une sous-variété réelle analytique de $\mathbb{C}^k$. L'ensemble J^* étant invariant par Λ, il en résulte que H et L sont invariants par $\Lambda'(0)$. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'il existe $1 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq k$ tels que $H = \{\mathrm{Im} z_s = 0 \text{ pour tout } s \neq s_1, \ldots, s_n\}$. Ce changement ne modifie pas la forme triangulaire de Λ. Il est clair aussi que si f est homogène, ce changement de coordonnées ne change pas la rigidité de φ.

Lemme 5.3 *Soient γ_1, ..., γ_k les éléments de la diagonale principale de $\Lambda'(0)$. On a $|\gamma_s| \leq d$ pour tout $1 \leq s \leq k$.*

Preuve— On a supposé ci-dessus que $1 < |\gamma_1| \leq \cdots \leq |\gamma_k|$. Il suffit de montrer que $|\gamma_k| \leq d$. Notons l la droite réelle $\{z_1 = \cdots = z_{k-1} = \mathrm{Im} z_k = 0\}$. On a $l \subset H$ et la droite complexe engendrée par l est invariante par Λ car Λ est triangulaire. Soit l' une courbe réelle analytique contenue dans J^* et tangente à l. Soit $\{n_i\}$ une suite croissante d'entiers positifs telle que $\lim \arg \gamma_k^{n_i} \longrightarrow 0$. Utilisant le développement de Taylor des équations définissant l', on vérifie facilement que $\Lambda^{n_i}(l')$ tend vers l quand i tend vers l'infini. La droite l est donc contenue dans J^* car J^* est un fermé invariant par Λ. Notons G_k la restriction de G^* à la droite complexe $\{z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0\}$. La fonction G_k est sous-harmonique non identiquement nulle et elle ne prend que des valeurs positives ou nulles. De plus, G_k s'annule sur $\mathrm{Im} z_k = 0$ et $G_k(\gamma_k z) = d G_k(z)$. Donc on a, si $d < |\gamma_k|$,

$$G_k(z) \leq \left(\frac{d}{|\gamma_k|} |z| + \mathrm{const} \right).$$

En effet on peut supposer que G est radiale, $|\gamma_k|^s \leq |z| < |\gamma_k|^{s+1}$ et on obtient

$$\begin{aligned} G(z) &\leq G(|\gamma_k|^{s+1}) = d^{s+1} G(1) = G(1) \left(\frac{d}{|\gamma_k|} \right)^s |\gamma_k|^s d \\ &\leq |\gamma_k|^s d + \mathrm{const} \leq |z| \frac{d}{|\gamma_k|} + \mathrm{const} \end{aligned}$$

Le principe de Phragmén-Lindelöf impliquerait que G_k serait identiquement nulle. Par conséquent, $|\gamma_k| \leq d$.

$\square$

Proposition 5.4 *Soit* $H = \{\mathrm{Im} z_s = 0 \text{ pour } s \neq s_1, \ldots, s_n\}$ *l'espace tangent de* J^* *en* 0. *Alors* $s_j = j$ *pour tout* $j = 1, \ldots, n$. *De plus,* $|\gamma_j| = \sqrt{d}$ *pour* $1 \leq j \leq n$ *et* $\gamma_j = \pm d$ *pour* $n+1 \leq j \leq k$. *En particulier,* Λ *est de degré au plus deux et les équations de* J^* *au voisinage de* 0 *sont de la forme*

$$\mathrm{Im} z_j = h_j(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n),\ n+1 \leq j \leq k$$

où les h_j *sont des polynômes homogènes de degré 2.*

Preuve— Soit s le plus grand indice vérifiant $|\gamma_s| \leq \sqrt{d}$. Posons $s = 0$ si $|\gamma_1| > \sqrt{d}$. Posons $H_s := \{z_1 = \cdots = z_s = 0\}$. Comme dans le lemme 5.3, en utilisant le développement de Taylor des équations d'une variété contenue dans J^* et tangente à H_s et en prenant des limites des images par Λ^n, on peut montrer que J^* contient $H \cap H_s$. Donc $H \cap H_s$ ne contient aucune droite complexe. On en déduit que $s_j \leq s$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Donc $|\gamma_{s_j}| \leq \sqrt{d}$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Par conséquent, le jacobien réel de la dérivée de $\Lambda_{|J^*}$ en 0 est majoré par $(\sqrt{d})^{2n} d^{k-n} = d^k$. De la relation $f^*\mu = d^k\mu$ on déduit que $\Lambda^*(\mu^*) = d^k\mu^*$ au voisinage de 0 car $\varphi_*(\mu^*) = \mu$. Le jacobien de $\Lambda_{|J^*}$ en 0 est donc égal à d^k. Par suite, $|\gamma_{s_j}| = \sqrt{d}$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et $|\gamma_j| = d$ si $j \neq s_1, \ldots, s_n$. En particulier, $\{1, \ldots, n\} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. D'où $s_j = j$ pour $j = 1, \ldots, n$.

On a alors $H = \{\mathrm{Im} z_{n+1} = \cdots = \mathrm{Im} z_k = 0\}$. Comme H est invariant par $\Lambda'(0)$, γ_j est un nombre réel pour tout $j \geq n+1$. D'où $\gamma_j = \pm d$ pour $j \geq n+1$.

Le fait que Λ est de degré au plus deux résulte des résonnances possibles entre les valeurs propres de $\Lambda'(0)$.

La variété J^* étant réelle analytique et tangente à H en 0, au voisinage de 0 elle est définie par les équations

$$\mathrm{Im} z_j = h_j(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n, \mathrm{Re} z_{n+1}, \ldots, \mathrm{Re} z_k)$$

les fonctions h_j étant réelles analytiques pour $j = n+1, \ldots, k$. Utilisant le développement de Taylor des h_j et l'invariance de J^* par Λ, on montre que les h_j sont de la forme

$$h_j(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n, \mathrm{Re} z_{n+1}, \ldots, \mathrm{Re} z_k) = P_j(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_n, \overline{z}_n) + L_j(\mathrm{Re} z_{n+1}, \ldots, \mathrm{Re} z_k)$$

où les P_j sont des polynômes homogènes de degré 2 et les L_j sont linéaires. La variété J^* étant tangente à H, les L_j sont donc nuls.

□

Nous avons besoins du lemme suivant que nous appliquerons à des restrictions convenables de G^*. Pour tout $R > 0$ on pose

$$v_R(z) := 2R - \frac{2R}{\pi}\left(\arctan\frac{R - \mathrm{Re}z}{\mathrm{Im}z} + \arctan\frac{R + \mathrm{Re}z}{\mathrm{Im}z}\right).$$

La somme dans les parenthèses représente l'angle en z du triangle de sommets z, $-R$ et R.

Lemme 5.5 *Soit $v \geq 0$ une fonction continue sous-harmonique définie sur le demi-plan $H^+ := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}z \geq 0\}$ et nulle sur $\mathbb{R}$. Soit R un nombre réel positif. Supposons qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $v(z) \leq c|z|$ pour tout z vérifiant $|z| = R$. Alors $v(z) \leq cv_R(z)$ pour tout $z \in H^+$ vérifiant $|z| < R$. S'il existe un nombre réel $d > 1$ tel que $v(dz) = dv(z)$ pour tout $z \in H^+$, alors $v(z) = c\mathrm{Im}z$ où $c \geq 0$ est une constante.*

Preuve— La fonction $cv_R(z)$ est harmonique dans le demi-disque $\{|z| < R\} \cap H^+$ nulle sur $]-R, R[\cap H^+$ et égale à cR sur $\{|z| = R\} \cap H^+$. Par conséquent, cv_R majore la fonction v dans ce demi-disque. D'où $v(z) \leq cv_R(z)$ pour tout $z \in H^+$ vérifiant $|z| < R$.

Supposons que $v(dz) = dv(z)$. Soit $a \in H^+$ tel que $|a| = 1$ et $v(a) = \max_{\{|z|=1|\}\cap H^+} v(z)$. Posons $c = v(a)$. On a $v(d^s z) \leq cd^s$ pour tout $s \geq 1$ et tout $|z| = 1$. On déduit de la partie précédente que $v(z) \leq cv_{R_s}(z)$ pour tout $z \in H^+$ et tout $R_s := d^s > |z|$. Alors $v(z) \leq \lim_{s\to\infty} cv_{R_s}(z) = c\mathrm{Im}z$. Pour $z = a$, cette inégalité nous donne $a = i$. La fonction sous-harmonique, $v(z) - c\mathrm{Im}z$, atteint donc son maximum en a; elle est donc identiquement nulle et $v(z) = c\mathrm{Im}z$.

□

Proposition 5.6 *L'automorphisme Λ est linéaire et défini par une matrice diagonale. On peut choisir les coordonnées z telles que J^* soit défini par des équations de la forme $\mathrm{Im}z'' = q(z', \overline{z}')$ où $z' := (z_1, \ldots, z_n)$, $z'' := (z_{n+1}, \ldots, z_k)$ et q est une forme hermitienne à valeurs vectorielles vérifiant $q^{-1}(0) = \{0\}$. De plus les nouvelles coordonnées ne changent pas la rigidité éventuelle de φ.*

Preuve— L'idée est que l'existence de termes non diagonaux dans Λ et l'invariance de G^* par Λ permettent de construire une droite complexe sur laquelle G^* est nulle; ce qui est impossible.

Notons Λ_1, ..., Λ_k les fonctions coordonnées de Λ. Montrons d'abord que si $j \geq n+1$, Λ_j est indépendante de z_s pour tout $s \geq n+1$ et $s \neq j$. On sait que $H_n := \{z_1 = \cdots = z_n = 0\}$ est invariant par la dérivée $\Lambda'(0)$ et que $\Lambda'(0)$ est égale à Λ sur H_n car Λ est triangulaire et qu'il n'y a pas de résonnances dans cet espace. Par conséquent, H_n est invariant par Λ. D'après la proposition 5.4, $J^* \cap H_n = \{\mathrm{Im} z_{n+1} = \cdots = \mathrm{Im} z_k = 0\}$. L'application linéaire $\Lambda_{|H_n}$ préserve le sous-espace réel $J^* \cap H_n$. Par conséquent, ses coefficients sont réels. Montrons que $\Lambda_{|H_n}$ est définie par une matrice diagonale. Si tel n'était pas le cas, quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut suposer que $\Lambda_{|H_n}$ contient le bloc de Jordan $(\Lambda_{k-1}, \Lambda_k) = (\alpha z_{k-1}, \alpha z_k + d z_{k-1})$ où $\alpha = \pm d$. Quitte à remplacer Λ par Λ^2, on peut supposer que $\alpha = d$. Posons $K := \{z_1 = \cdots = z_{k-2} = 0\}$. La fonction G^* étant continue, il existe donc une constante $c > 0$ telle que $G^*(z) \leq c$ pour tout z vérifiant $\|z\| \leq 1$. Soit G_K la restriction de G^* sur K. Posons $\mathcal{D} := \{z_{k-1} = 0\} \cap K$, $\mathcal{D}' := \{z_k = 0\} \cap K$ et $\mathcal{D}_s := \Lambda^s(\mathcal{D}') = \{(a, sa) \in K \text{ avec } a \in \mathbb{C}\}$ pour tout $s \geq 1$. Les relations $G^* \circ \Lambda = dG^*$ et $G^*(z) \leq c$ pour $\|z\| \leq 1$ impliquent $G_K(z) \leq c|z_k|/s$ pour tout $z = (z_{k-1}, z_k) \in \mathcal{D}_s$ vérifiant $|z_{k-1}| \leq d^s$. Puisque G^* est nulle sur l'ensemble J^* qui contient $\{\mathrm{Im} z_{k-1} = \mathrm{Im} z_k = 0\} \cap K$, d'après le lemme 5.5, pour tout $z = (z_{k-1}, z_k) \in \mathcal{D}_s$ et tout s tel que $d^s \geq |z_{k-1}|$ on a

$$G_K(z) \leq c v_{d^s}(z_{k-1}) = c v_{d^s}(z_k/s).$$

Par continuité on a

$$G_K(0, z_k) = \lim_{s \to \infty} G_K(z_k/s, z_k) \leq \lim_{s \to \infty} c v_{d^s}(z_k/s) = 0.$$

La fonction G^* est donc nulle sur la droite $\mathcal{D}$. C'est la contradiction cherchée. Par suite $\Lambda_{|H_n}$ est linéaire et définie par une matrice diagonale.

Montrons maintenant que Λ_j est indépendant de z_s pour tout $s \neq j$ et tout $1 \leq j \leq n$. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $1 \leq j \leq n$ et $s \neq j$ tel que Λ_j dépende de z_s. D'après la proposition 5.4, on a $s \leq j-1$ et Λ_i est linéaire pour tout $i \leq n$. Quitte à faire un changement linéaire des coordonnées en z_1, ..., z_n, on peut supposer que $\Lambda_n(z) := \gamma_n z_n + z_{n-1}$ et $\gamma_{n-1} = \gamma_n$. Ce changement ne modifie pas la forme triangulaire de Λ. Notons $H_{n-2} := \{z_1 = \cdots = z_{n-2} = 0\}$. Ce sous-espace est invariant par Λ car Λ est triangulaire. L'ensemble $J^* \cap H_{n-2}$ est une variété réelle analytique dont le plan tangent en 0 est $H \cap H_{n-2}$. Cette variété est définie par $k-n$ équations $\mathrm{Im} z_j = l_j(z_{n-1}, \overline{z}_{n-1}, z_n, \overline{z}_n)$ où

$$l_j(z_{n-1}, \overline{z}_{n-1}, z_n, \overline{z}_n) := h_j(0, \ldots, 0, z_{n-1}, \overline{z}_{n-1}, z_n, \overline{z}_n)$$

pour $j = n+1, \dots, k$.

Fixons un $j \geq n+1$. Quitte à remplacer Λ par Λ^2, on peut supposer que $\gamma_j = d$. On a $\Lambda_{j|H_{n-2}}(z) = dz_j + P(z_{n-1}, z_n)$ où P est un polynôme holomorphe. Le fait que $J^* \cap H_{n-2}$ soit invariant par Λ entraîne que

$$l_j(\gamma_n z_{n-1}, \overline{\gamma}_n \overline{z}_{n-1}, \gamma_n z_n + z_{n-1}, \overline{\gamma}_n \overline{z}_n + \overline{z}_{n-1}) = dl_j(z_{n-1}, \overline{z}_{n-1}, z_n, \overline{z}_n) + \mathrm{Im}P(z_{n-1}, z_n).$$

Soient α_j, $\overline{\alpha}_j$, β_j les coefficients de $z_{n-1}\overline{z}_n$, $\overline{z}_{n-1}z_n$ et $|z_n|^2$ de l_j. On supprime les termes harmoniques et les termes $|z_n|^2$ de l'équation précédente. On obtient

$$\overline{\gamma}_n \beta_j z_{n-1}\overline{z}_n + \gamma_n \beta_j \overline{z}_{n-1} z_n + (\gamma_n \alpha_j + \overline{\gamma}_n \overline{\alpha}_j + \beta_j)|z_{n-1}|^2 = 0$$

Par conséquent, $\beta_j = 0$. Donc les l_j sont harmoniques en z_n. Posons $H_{n-1} := \{z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0\}$. Alors $J^* \cap H_{n-1}$ est défini par $k-n$ équations du type $\mathrm{Im} z_j = \alpha_j z_n^2 + \overline{\alpha}_j \overline{z}_n^2$ et $J^* \cap H_{n-1}$ contient la courbe holomorphe définie par les équations $z_j = 2i\alpha_j z_n^2$. Ceci contredit le fait que J^* ne contient aucune image holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ et par conséquent Λ_j ne dépend pas de z_s pour $s \neq j$ et $1 \leq j \leq n$.

Il reste à prouver que Λ_j est indépendante de z_s pour tous $1 \leq s \leq n$ et $n+1 \leq j \leq k$. On suppose qu'il existe $j \geq n+1$ et $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq n$ tels que Λ_j contienne le terme $z_{s_1} z_{s_2}$ avec un coefficient $\alpha \neq 0$. Comme Λ est triangulaire, on a $\gamma_j = \gamma_{s_1}\gamma_{s_2}$. La variété J^* est définie par $k-n$ équations $\mathrm{Im} z_s = h_s(z_1, \overline{z}_1, \dots, z_n, \overline{z}_n)$ pour $j = n+1, \dots, k$ où les h_s sont des polynômes réels homogènes de degré 2. En tenant compte l'invariance de J^* par Λ on a

$$h_j(\gamma_1 z_1, \overline{\gamma}_1 \overline{z}_1, \dots, \gamma_n z_n, \overline{\gamma}_n \overline{z}_n) = \mathrm{Im}\Lambda_j(\gamma_1 z_1, \dots, \gamma_n z_n, h_j(z_1, \overline{z}_1, \dots, z_n, \overline{z}_n))$$

où $\Lambda_j(z) = \gamma_j z_j + P(z_1, \dots, z_n)$ est indépendant de z_{n+1}, ..., z_{j-1} et P est un polynôme. Soit β est le coefficient de $z_{s_1} z_{s_2}$ dans h_j. Les coefficients de $z_{s_1} z_{s_2}$ des deux membres de cette équation sont $\gamma_{s_1}\gamma_{s_2}\beta$ et $\gamma_j \beta + \gamma_{s_1}\gamma_{s_2}\alpha$. Or $\gamma_j = \gamma_{s_1}\gamma_{s_2} \neq 0$ et $\alpha \neq 0$; c'est la contradiction cherchée.

La variété J^* est comme on a vu définie par $k-n$ équations $\mathrm{Im} z_j = h_j(z_1, \overline{z}_1, \dots, z_n, \overline{z}_n)$ où les h_j sont des polynômes réels homogènes de degré 2 pour tout j avec $n+1 \leq j \leq k$. Posons $z' := (z_1, \dots, z_n)$, $\overline{z}' := (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n)$ et $z'' := (z_{n+1}, \dots, z_k)$. Il existe des polynômes holomorphes homogènes $P_j(z')$ de degré 2 et des formes hermitiennes $q_j(z', \overline{z}')$ tels que $h_j = \mathrm{Im}P_j + q_j$. L'ensemble J^* étant invariant par Λ, on a $P_j(\gamma_1 z_1, \dots, \gamma_n z_n) =$

$\gamma_j P_j(z_1,\ldots,z_n)$ et $q_j(\gamma_1 z_1,\ldots,\overline{\gamma}_n\overline{z}_n)=\gamma_j q_j(z_1,\ldots,\overline{z}_n)$. Quitte à effectuer le changement de coordonnées $z_j\mapsto z_j-P(z')$, on peut supposer que $P_j=0$ pour tout $j\geq n+1$. Comme J^* ne contient aucune droite complexe, l'ensemble $\{z'|\ q(z',\overline{z}')=0\}$ est égal à $\{0\}$ où $q:=(q_{n+1},\ldots,q_k)$. Observons que si f est homogène, le changement de coordonnées ci-dessus ne modifie pas la rigidité de φ.

□

Proposition 5.7 *Pour tout vecteur $c\in\mathbb{R}^{k-n}$, la fonction G^* est constante sur la variété $J(c):=\{\mathrm{Im}z''=q(z',\overline{z}')+c\}$. Par conséquent, il existe une fonction continue Φ telle que $\Phi(\mathrm{Im}z''-q(z',\overline{z}'))=G^*(z)$.*

Preuve— Par le choix de l'ouvert Ω contenant le point fixe b, la fonction G^* et la mesure μ^* sont simultanément laminées au voisinage de 0. Considérons les plaques de la lamination comme des graphes au-dessus de H, l'espace tangent à J^* en 0. Il existe un voisinage X de $0\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^{k-n}=H$, un voisinage Y de $0\in\mathbb{R}^{k-n}$, une application réelle analytique $\psi(z',\mathrm{Re}z'',v)$ de $X\times Y$ dans $\mathbb{R}^k$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. $\psi(z',\mathrm{Re}z'',0)=q(z',\overline{z}')$;
2. $\psi(0,0,v)=v$ pour tout $v\in Y$;
3. G^* est réelle analytique sur $X_v:=\{\mathrm{Im}z''=\psi(z',\mathrm{Re}z'',v)\}$;
4. Pour tous w_1, w_2 dans X_v, on a $G^*(w_1)\leq\delta(\|w_1-w_2\|)G^*(w_2)$ où δ est une fonction réelle positive indépendante de v et tendant vers 1 en 0.

L'application ψ s'écrit sous la forme:

$$\psi(z',\mathrm{Re}z'',v)=v+q(z',\overline{z}')+v\mathrm{O}(\|z'\|)+v\mathrm{O}(\|\mathrm{Re}z''\|).$$

Posons $w:=(0,0,c)\in J(c)$. Soit $x=(\alpha,\beta,\gamma)\in J(c)$. On a $\gamma=c+q(\alpha,\overline{\alpha})$. Il suffit de montrer que $G^*(x)=G^*(w)$. Soit s un entier suffisamment grand. On pose $v:=cd^{-s}$, $w_s:=(0,0,v)$, $(\alpha_s,\beta_s,0):=\Lambda^{-s}(\alpha,\beta,0)$, $\gamma_s:=\psi(\alpha_s,\beta_s,v)$, $y_s:=(\alpha_s,\beta_s,\gamma_s)$ et $x_s:=\Lambda^s(y_s)$. On a que $\Lambda^{-s}(J(c))=J(d^sc)$. En utilisant le développement ci-dessus de ψ, on montre facilement que x_s tend vers x quand s tend vers l'infini. Comme G^* est continue, il suffit de

montrer que $\lim G^*(x_s) = G^*(w)$. On a $G^*(x_s) = d^s G^*(y_s)$ et $G^*(w) = d^s G^*(w_s)$. D'après la condition 4, on a

$$\delta(\|y_s - w_s\|)^{-1} G^*(x_s) \leq G^*(w) \leq \delta(\|y_s - w_s\|) G^*(x_s).$$

Quand s tend vers l'infini, on obtient $G^*(x) = G^*(w)$ car y_s et w_s tendent vers 0 et $\delta(\|y_s - w_s\|)$ tend vers 1.

□

Nous voulons à présent construire les éléments du groupe $\mathcal{A}$ qui opère transitivement sur les fibres de φ. Il est clair que pour deux points p, q d'une même fibre $G^*(p) = G^*(q)$ et que pour des points p, q génériques il existe une application holomorphe g telle que $g(p) = q$, $\varphi \circ g = \varphi$ et $G^* \circ g = G^*$. On veut étudier les dérivées de g à l'aide de la relation précédente. Cependant G^* n'est pas dérivable, cela oblige à quelques détours. On va étudier d'abord la restriction de G^* aux droites complexes.

Soit $\mathcal{D} \subset \{z' = 0\}$ une droite complexe passant par 0. On dit que $\mathcal{D}$ est *non générique* si $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{D} \cap \{z' = 0, \mathrm{Im} z'' = 0\} = 1$. Notons $\mathcal{D}^+ \subset \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^- \subset \mathcal{D}$ deux demi-plans complexes dont le bord est $\{z' = 0, \mathrm{Im} z'' = 0\} \cap \mathcal{D}$.

Corollaire 5.8 *Pour toute droite non générique $\mathcal{D} \subset \{z' = 0\}$, il existe des constantes non négatives c^+ et c^- dépendant continûment de $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$ telles que $G^*(z) = c^+\|\mathrm{Im} z\|$ sur $\mathcal{D}^+$ et $G^*(z) = c^-\|\mathrm{Im} z\|$ sur $\mathcal{D}^-$. Pour toute droite complexe $\mathcal{D}' \subset \{z'' = 0\}$ passant par 0, il existe une constante $c' > 0$ dépendant continûment de $\mathcal{D}'$ telle que $G^*(z) = c'\|z\|^2$.*

Preuve— Remarquons qu'une droite non générique rencontre J^* le long d'une droite réelle comme il résulte des équations de J^* (*voir* la proposition 5.6).

Observons que $\mathcal{D}$ est invariante par Λ car Λ est diagonale. L'équation fonctionnelle $G^*(\Lambda z) = dG^*(z)$ et le lemme 5.5 entraînent l'existence de c^+ et c^-. Ces constantes dépendent continûment de $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$ car G^* est continue.

Pour déterminer G^* sur une droite générique, on utilise la connaissance de G^* sur les droites non génériques et l'invariance de G^* sur $J(c)$. Fixons un $z = (z', 0) \in \mathcal{D}'$. On pose $w := (0, 0, -q(z', \overline{z}')) \in \{z' = 0, \mathrm{Re} z'' = 0\}$. D'après la proposition 5.7, on a $G^*(z) = G^*(w)$. Il existe un vecteur réel $v \in \mathbb{R}^k$ qui ne dépend que de $\mathcal{D}'$ telle que $q(z', \overline{z}') = v\|z\|^2$. D'après la partie précédente, il existe une constante $c > 0$ telle que $G^*(z) = c\|v\|\|z\|^2$.

Posons $c' := c\|v\|$. On a $G^*(z) = c'\|z\|^2$. Il est clair que $c' = c\|v\|$ dépend continûment de $\mathcal{D}'$.

$\square$

Nous allons à présent définir des "dérivées" de G^* dans certaines directions. Soit h une fonction définie sur une surface de Riemann S, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit z une coordonnée locale de S nulle en a. Si u est un vecteur tangent en a à S, il existe une constante c telle que $u = c\frac{\partial}{\partial z}$. Etant donné une fonction harmonique l, on définit $u \otimes \overline{u}(h) := c\lim_{z\to 0}[h(z) - l(z)]|z|^{-2}$ lorsque cette limite existe. Observons que cette définition est indépendante de la coordonnée z et que lorsque la limite existe elle est indépendante l. C'est une formalisation de $\partial^2/\partial u\partial\overline{u}$.

Lemme 5.9 i. *Soit v un vecteur non nul de $\{z' = 0, \mathrm{Re} z'' = 0\}$. Soit $\sigma \subset \mathbb{C}^k$ un arc réel lisse issu de 0 et tangent à v. Alors la dérivée $v(G^*_{|\sigma})$ existe, elle est indépendante de σ et dépend continûment de v. On la note $v(G^*)$. De plus $v(G^*) = c^+\|v\|$ où c^+ est la constante associée à la demi-droite non générique contenant v qui est définie dans le corollaire 5.8.*

ii. *Soit u un vecteur holomorphe tangent à $\{z'' = 0\}$ en 0. Soit $S \subset \mathbb{C}^k$ une courbe holomorphe tangente à u en 0. Alors $u \otimes \overline{u}(G^*_{|S})$ existe, elle est indépendante de S et dépend continûment de $u \otimes \overline{u}$. On la note $u \otimes \overline{u}(G^*)$*

Preuve— **i.** D'après la proposition 5.7, il suffit de considérer le cas où σ est contenue dans $\{z' = 0, \mathrm{Re} z'' = 0\}$. Les équations de J^* entraînent que $\{z' = 0, \mathrm{Im} z'' = 0\}$ est contenu dans J^*. Par conséquent, G^* s'annule sur cet ensemble. Soient $w = (w', w'') \in \sigma \setminus \{0\}$ et $\mathcal{D}_w$ la droite complexe passant par 0 et w. C'est une droite non générique. On considère $\mathcal{D}_w^+ \subset \mathcal{D}_w$ le demi-plan complexe contenant w dont le bord est la droite réelle $\{\mathrm{Im} z'' = 0\} \cap \mathcal{D}_w$. Notons également $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}^+$) la droite complexe (resp. le demi-plan complexe) qui contient v. D'après le corollaire 5.8, il existe une constante c_w^+ qui ne dépend que de $\mathcal{D}_w^+$ telle que $G^*(w) = c_w^+|\mathrm{Im} w''|$. On a donc $v(G^*_{|\sigma}) = |v|\lim_{w\to 0} c_w^+$. Comme G^* est continue, cette limite existe et égale à $|v|c^+$. Il est clair que cette constante ne dépend que de v. De plus, elle dépend continûment de v.

ii. Pour simplifier les notations, on suppose que $u = \partial/\partial z_1$. Alors la courbe S est définie par les équations $z_s = \psi_s(z_1)$ pour $s = 2, \ldots, k$ où les fonctions ψ_s sont holomorphes. Posons $\psi' := (z_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$, $\psi'' :=$

$(\psi_{n+1},\ldots,\psi_k)$ et $\phi := (1,0,\ldots,0)$. On note Π la projection $\Pi(z) := z_1$ et $G_S := G^*\circ(\Pi_{|S})^{-1}$. D'après la proposition 5.7, on a $G_S(z_1) = G^*(w)$ où

$$w := (w', \mathrm{Re}w'', \mathrm{Im}w'') = (0, 0, \mathrm{Im}\psi''(z) - q(\psi', \overline{\psi}')).$$

On note $\mathcal{D}^+$ la limite de $\mathcal{D}^+_w$ quand $z_1 \to 0$. Alors $\mathcal{D}^+$ est un demi-plan complexe qui ne dépend que de $u\otimes\overline{u}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{D}^+ = \{z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0, \mathrm{Im}z_k \geq 0\}$. Pour z_1 suffisamment petit, z_k est une coordonnée de $\mathcal{D}_w$ et on a $\mathcal{D}^+_w = \{\mathrm{Im}z_k \geq 0\}\cap\mathcal{D}_w$. D'après le corollaire 5.8, il existe une constante c_w dépendant continûment de w telle que $G_S(z_1) = c_w|\mathrm{Im}w_k|$ pour z_1 suffisamment petit. On pose $c := \lim c_w$.

Comme S est tangente à u, il existe des constantes c_s telles que $\psi_s(z_1) = c_s z_1^2 + \mathrm{o}(|z_1|^2)$ pour tout $s = 2,\ldots,k$. Posons $c'' := (c_{n+1},\ldots,c_k)$. Alors $\mathrm{Im}w'' = \mathrm{Im}c''z_1^2 - |z_1|^2 q(\phi,\overline{\phi}) + \mathrm{o}(|z_1|^2)$. D'où

$$G_S(z_1) = c[\mathrm{Im}c_k z_1^2 - |z_1|^2 q_k(\phi,\overline{\phi})] + \mathrm{o}(|z_1|^2).$$

On en déduit que $u\otimes\overline{u}(G^*_{|S}) = -cq_k(\phi,\overline{\phi})$ car $\mathrm{Im}c_k z_1^2$ est harmonique. La continuité de cette quantité est évidente.

$\square$

Lemme 5.10 *Soit K un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Supposons K non contenu dans aucun sous-espace réel (resp. complexe) propre de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Alors il existe un système linéaire de coordonnées dans lequel toute application linéaire $L:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $L:\ \mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$) vérifiant $L(K) = K$ est une isométrie (resp. isométrie complexe).*

Preuve— On considère le cas de $\mathbb{C}^n$; la preuve est valable aussi pour le cas de $\mathbb{R}^n$. Soit K' l'ensemble des points λz où $|\lambda|\leq 1$ et $z\in K$. Soit H l'enveloppe convexe de K'. Comme K est borné et engendre $\mathbb{C}^n$, H est borné et d'intérieur non vide. Notons $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_H$) le groupe des applications linéaires complexes $L:\ \mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ vérifiant $L(K) = K$ (resp. $L(H) = H$). On a $\mathcal{O}_K\subset\mathcal{O}_H$. Comme H est borné et d'intérieur non vide, le groupe $\mathcal{O}_H$ est compact. On en déduit que $\mathcal{O}_K$ est compact. On note e_1, ..., e_n les vecteurs de la base orthonormale canonique de $\mathbb{C}^n$ et $< z, z' > := \sum_{i=1}^n z_i\overline{z}'_i$ le produit hermitien usuel de $\mathbb{C}^n$. On définit

$$< z, z' >_K := \int_{\mathcal{O}_K} < L(z), L(z') > d\nu(L)$$

où ν est la mesure de Haar de $\mathcal{O}_K$. On vérifie facilement que $< .,. >_K$ est un produit scalaire et que $< z, z' >_K = < L(z), L(z') >_K$ pour tout $L \in \mathcal{O}_K$. Soit $\mathcal{M}$ la matrice carrée de rang n définie par $\mathcal{M} := (< e_i, e_j >_K)$. Elle est définie positive. Il existe donc une matrice inversible $\mathcal{N}$ vérifiant ${}^\tau\mathcal{N}\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{M}$. Posons $w := \mathcal{N}z$. Pour ces nouvelles coordonnées, on a

$$< w, w' > = < \mathcal{N}z, \mathcal{N}z' > = {}^\tau z\ {}^\tau\mathcal{N}\overline{\mathcal{N}}\overline{z}' = {}^\tau z\mathcal{M}\overline{z}' = < z, z' >_K .$$

Par conséquent, $< w, w' > = < L(w), L(w') >$ pour tout $L \in \mathcal{O}_K$. Dans ces nouvelles coordonnées, L est bien une isométrie.

$\square$

Soit N l'espace $\{z' = 0, \mathrm{Re} z'' = 0\}$. Notons K_N l'ensemble des vecteurs $v \in N$ vérifiant $v(G^*) < 1$ et $(-v)(G^*) < 1$. Soit H l'espace complexe $\{z'' = 0\}$. On identifie H avec l'espace des vecteurs holomorphes tangents à H. Notons K_H l'ensemble des vecteurs $u \in H$ vérifiant $u \otimes \overline{u}(G^*) < 1$. Les ensembles K_N et K_H représentent la variation de G^* au voisinage de 0 suivant les directions tangentes de N et de H.

Lemme 5.11 *K_N (resp. K_H) est un ouvert borné de N (resp. de H) contenant le point* 0.

Preuve— D'après le lemme 5.9, $v(G^*)$ dépend continûment de v. Par conséquent, K_N est un ouvert. Il est clair que $0 \in K_N$. Il reste à montrer que K_N est borné.

Sinon, soient $v_s \in K_N$ tels que $\lim \|v_s\| = +\infty$. Notons $\mathcal{D}_s$ la droite complexe qui est engendrée par v_s. Notons également $\mathcal{D}_s^+$ (resp. $\mathcal{D}_s^-$) le demi-plan complexe contenant v_s (resp. $-v_s$) dont le bord est $\{z' = 0, \mathrm{Im} z'' = 0\} \cap \mathcal{D}_s$. Alors pour tout $z \in \mathcal{D}_s^\pm$, on a $G^*(z) = c_s^\pm \|\mathrm{Im} z\|$ et $(\pm v_s)(G^*) = c_s^\pm \|v_s\|$. On en déduit du lemme 5.9 que $\lim c_s^+ = \lim c_s^- = 0$ car $\lim \|v_s\| = +\infty$ et $(\pm v_s)(G^*) < 1$. La fonction G^* étant continue, elle doit s'annuler sur toute droite complexe adhérente à la suite $\{\mathcal{D}_s\}$. C'est la contradiction cherchée car G^* ne peut s'annuller sur aucune droite complexe.

D'après le lemme 5.9, $u \otimes \overline{u}(G^*)$ dépend continûment de u. Donc K_H est ouvert. Il est clair que $0 \in K_H$. Il reste à montrer que K_H est borné.

Sinon, d'après le corollaire 5.8, pour toute droite complexe $\mathcal{D} \subset H$ il existe une constante c telle que pour tout $z \in \mathcal{D}$ on ait $G^*(z) = c\|z\|^2$. Si K_H n'est pas borné, il existe des droites $\mathcal{D}_s \subset H$ et des constantes c_s tendant vers 0 telles que $G^*(z) = c_s\|z\|^2$ pour tout $z \in \mathcal{D}_s$. Comme G^* est

continue, elle doit s'annuller sur toute droite adhérente à la suite $\{\mathcal{D}_s\}$. C'est la contradiction cherchée.

$\square$

D'après le lemme 5.11, quitte à effectuer des changements linéaires de coordonnées dans $\{z'' = 0\}$ et dans $\{z' = 0\}$, on peut supposer que toute application linéaire (resp. linéaire holomorphe) de N (resp. H) préservant K_N (resp. K_H) est une isométrie (resp. isométrie complexe). Il est clair que ces changements de coordonnées préservent toutes les propriétés de J^*, G^* ainsi que la rigidité de φ, mais l'application linéaire Λ n'est plus définie par une matrice diagonale.

Notons $\mathcal{M}$ la matrice du changement de coordonnées effectué. Il existe des matrices carrées $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ de rangs n et $k-n$ telles que

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_2 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathcal{M}\Lambda\mathcal{M}^{-1}$ est diagonale. Ses éléments diagonaux sont égaux à $\pm d$ ou à $\sqrt{d}$ en module. On constate que les n premières (resp. $k-n$ dernières) fonctions coordonnées de Λ sont indépendantes de z' (resp. z''). Quitte à remplacer Λ par Λ^2 on peut supposer que $\frac{1}{d}\Lambda'' = \mathrm{id}$ où $\Lambda = (\Lambda', \Lambda'')$. D'après les propositions 5.7, 5.12 et le corollaire 5.8, l'application $\frac{1}{\sqrt{d}}\Lambda'$ est une isométrie complexe de $\mathbb{C}^n$. En effet, $(\frac{1}{\sqrt{d}}\Lambda', \mathrm{id})$ préserve la fonction G^*.

Pour tout $u = (u', u'') \in J^*$, on pose τ_u l'application linéaire de $\mathbb{C}^k$ dans lui-même définie par

$$\tau_u(z', z'') := (z' + u', z'' + 2iq(z', \overline{u}') + u'').$$

Alors $\tau_u(0) = u$. D'après la proposition 5.7, on a $G^* \circ \tau_u = G^*$ car τ_u préserve $J(c)$.

Proposition 5.12 *Soit W un ouvert de $\mathbb{C}^k$ rencontrant J^*. Soit $\tau = (\tau', \tau'')$ une application holomorphe ouverte de W dans $\mathbb{C}^k$ vérifiant $G^* \circ \tau = G^*$ dans W. Alors l'application τ' ne dépend pas de z'' et elle définit une isométrie complexe de $\mathbb{C}^n$. L'application τ est linéaire. Il existe $u \in J^*$ et $v \in J^*$ tels que $\tau_u \circ \tau$ et $\tau \circ \tau_v$ soient linéaires isométriques. De plus, les n premières (resp. $k-n$ dernières) fonctions coordonnées des applications $\tau_u \circ \tau$ et $\tau \circ \tau_v$ sont indépendantes de z' (resp. z''). En particulier si $\tau(0) = 0$ alors $u = v = 0$ et τ', τ'' sont linéaires isométriques.*

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin de quelques préliminaires:

Lemme 5.13 *Soit* $\tau = (\tau', \tau'')$ *une application holomorphe inversible d'un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{C}^k$ *vérifiant* $\tau(0) = 0$ *et* $G^* \circ \tau = G^*$. *Alors* $\frac{\partial \tau'}{\partial z''}(0) = 0$, $\frac{\partial \tau''}{\partial z'}(0) = 0$, $\frac{\partial \tau'}{\partial z'}(0)$ *et* $\frac{\partial \tau''}{\partial z''}(0)$ *sont des isométries complexes. De plus,* $\frac{\partial \tau''}{\partial z''}(0)$ *est une matrice à coefficients réels.*

Preuve— Comme $G^* \circ \tau = G^*$ dans un voisinage W de 0, on a $\tau(J^* \cap W) = J^* \cap \tau(W)$. Donc $\frac{\partial \tau}{\partial z}(0)$ préserve l'espace tangent complexe H et l'espace tangent réel L de J^* en 0. D'où $\frac{\partial \tau'}{\partial z''}(0) = 0$. La dérivée $\frac{\partial \tau'}{\partial z'}(0)$ est une application linéaire de H. Cette application préserve K_H car $G^* \circ \tau = G^*$. C'est donc une isométrie complexe.

Comme τ préserve J^*, on a $\mathrm{Im}\tau''(z) = q(\tau'(z), \overline{\tau'(z)})$ pour tout $z = (z', z'') \in W$ vérifiant $\mathrm{Im}z'' = q(z', \overline{z}')$. Le développement de Taylor d'ordre 1 en 0 des deux membres de l'équation précédente permet de voir que $\frac{\partial \tau''}{\partial z'}(0) = 0$. La dérivée $\frac{\partial \tau''}{\partial z''}(0)$ préserve $\{z' = 0, \mathrm{Im}z'' = 0\}$, elle est donc une isométrie complexe de $\mathbb{C}^{k-n}$ à coefficients réels et par suite elle préserve $N := \{z' = 0, \mathrm{Re}z'' = 0\}$. Par conséquent, elle préserve K_N car $G^* = G^* \circ \tau$. C'est donc une isométrie complexe de $\mathbb{C}^{k-n}$ dont les coefficients sont réels.

$\square$

Preuve de la proposition 5.12— Quitte à remplacer W par un ouvert convenable, on peut supposer que τ est injective. Comme $G^* \circ \tau = G^*$, on a $\tau(J^* \cap W) = J^* \cap \tau(W)$. Soient $w_1 = (w_1', w_1'') \in J^* \cap W$ et $w_2 = (w_2', w_2'') := \tau(w_1) \in J^* \cap \tau(W)$. Posons $\tilde{\tau} := \tau_{w_2}^{-1} \circ \tau \circ \tau_{w_1}$. On a $\tilde{\tau}(0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{\tau}'}{\partial z}(0) = \frac{\partial \tau'}{\partial z}(w_1)$ et $G^* \circ \tilde{\tau} = G^*$. D'après le lemme 5.13, $\frac{\partial \tilde{\tau}'}{\partial z''}(0) = 0$. D'où $\frac{\partial \tau'}{\partial z''}(w_1) = 0$. Ceci est vrai pour tout $w_1 \in J^* \cap W$. C'est donc vrai pour tout $w_1 \in W$ car τ est holomorphe et $J^* \cap W$ est non pluripolaire. On en déduit que τ' est indépendant de z''.

D'après le lemme 5.13, $\frac{\partial \tilde{\tau}'}{\partial z'}(0)$ est une isométrie de $\mathbb{C}^n$. Donc $\frac{\partial \tau'}{\partial z'}(w_1)$ est une isométrie de $\mathbb{C}^n$ pour tout $w_1 \in J^* \cap W$. Comme τ' est indépendant de z'', $\frac{\partial \tau'}{\partial z'}(w)$ est une isométrie de $\mathbb{C}^n$ pour tout $w \in W$. Ceci implique que τ' est une isométrie et par suite τ' est affine.

On va montrer que $\tilde{\tau}$ est une isométrie. D'après la partie précédente, $\tilde{\tau}'$ est une isométrie de $\mathbb{C}^n$. D'après le lemme 5.13, il suffit de montrer que $\tilde{\tau}''$ est une application linéaire indépendante de z'. L'application $\tilde{\tau}$ préservant J^*, on a

$$\mathrm{Im}\tilde{\tau}''(z', \mathrm{Re}z'' + iq(z', \overline{z}')) = q(\tilde{\tau}'(z'), \overline{\tilde{\tau}'(z')}).$$

Le membre de gauche est donc indépendant de z'', $\tilde{\tau}$ étant holomorphe, $\tilde{\tau}''$ s'écrit sous la forme $\tilde{\tau}''(z) = \sigma(z') + l(z'')$ où σ est une application holomorphe et l est une application linéaire à coefficients réels. On a donc

$$\mathrm{Im}\sigma(z') = -l(q(z', \overline{z}')) + q(\tilde{\tau}'(z'), \overline{\tilde{\tau}'(z')}).$$

Par conséquent, $\mathrm{Im}\sigma(z') = 0$ car le membre à droite ne contient aucun terme harmonique. On a $\sigma = 0$ et donc $\tau''(z) = l(z'')$.

Finalement, τ est linéaire. Soient $u = \tau^{-1}(0)$ et $v = \tau(0)$. Alors $\tau_u \circ \tau$ et $\tau \circ \tau_v$ vérifient les mêmes propriétés que $\tilde{\tau}$. Ce sont donc des applications linéaires isométriques. De plus, les n premières (resp. $k - n$ dernières) fonctions coordonnées de ces applications sont indépendantes de z' (resp. z'').

□

Corollaire 5.14 *Soit W un ouvert de $\mathbb{C}^k$ rencontrant J^*. Soit τ une application holomorphe ouverte de W dans $\mathbb{C}^k$ vérifiant $\varphi = \varphi \circ \tau$ dans W. Alors τ est une application affine holomorphe. De plus, l'ensemble $\mathcal{A}$ de ces applications affines est un groupe et pour tout $\tau \in \mathcal{A}$ on a $\tau(J^*) = (J^*)$.*

Preuve— Comme $G^* = G \circ \varphi$, la relation $\varphi = \varphi \circ \tau$ implique $G^* \circ \tau = G^*$ sur W. D'après la proposition 5.12, τ est une application affine holomorphe.

Par prolongement analytique, $\varphi = \varphi \circ \tau$ dans $\mathbb{C}^k$. Comme τ est ouverte, elle est inversible. On a $\varphi = \varphi \circ \tau^{-1}$. Donc $\tau^{-1} \in \mathcal{A}$. De plus, si τ' est une application affine vérifiant $\varphi = \varphi \circ \tau'$, on a $\varphi = \varphi \circ \tau \circ \tau'$. Par conséquent, $\mathcal{A}$ est un groupe. La relation $J^* = \varphi(J)$ implique

$$\tau(J^*) = \tau \circ \varphi^{-1}(J_k) = \varphi^{-1}(J_k) = J^*.$$

□

En utilisant une idée de Berteloot-Loeb [3], on montre la proposition suivante:

Proposition 5.15 *Soit $\mathcal{A}_{|J^*}$ le groupe des automorphismes $\tau_{|J^*}$ de J^* avec $\tau \in \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}_{|J^*}$ est co-compact, $\varphi(J^*) = J_k$ et $\mathcal{A}$ agit transitivement sur les fibres de φ.*

Preuve— Par rapport à [3], la seule différence dans notre cas est le fait que les éléments de $\mathcal{A}_{|J^*}$ ne sont pas tous isométriques. La proposition 5.12 nous permet d'adapter l'idée de Berteloot-Loeb.

L'application Λ étant dilatante, pour montrer que $\mathcal{A}_{|J^*}$ est co-compact, il suffit de montrer qu'il existe un ouvert borné W de J^* contenant 0 tel que pour tout $w \in \partial W$, il existe $w^* \in W$ vérifiant $\varphi(w^*) = \varphi(w)$. En effet, ceci implique que W contient un domaine fondamental de $\mathcal{A}$.

Notons Π la projection de J^* dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$ définie par $\Pi(z', z'') := (z', \mathrm{Re} z'')$. Soit $M > 1$ tel que $\|q(z', \overline{u}')\| \leq M\|z'\|\|u'\|$ pour tous z' et u'. On choisit un nombre fini des points $a_s = (a'_s, a''_s) \in J^*$ pour $s = 1, 2, ...$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. Pour tout s, on a $1/2 < \|\Pi(a_s)\| < 1$.
2. Dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$, l'enveloppe convexe U des points $\Pi(a_s)$ contient la boule de centre 0 est de rayon $1/2$.
3. Pour tout $u \in \partial U$, il existe un s tel que $\|u - \Pi(a_s)\| < 1/16M$.

On choisit $b_0 \in J^*$ tel que $\|b_0\| < 1/100$ et tel que la mesure

$$\frac{1}{d^{sk}} \sum_{f^s(z)=\varphi(b_0)} \delta_z$$

tende vers μ quand s tend vers l'infini. Alors l'ensemble $\bigcup_{s\geq 0} f^{-s}(\varphi(b_0))$ est dense dans J_k. Quitte à pertuber légèrement les points a_s, on peut supposer qu'il existe un p tel que $f^p(\varphi(a_s)) = \varphi(b_0)$ pour tout s. Posons $b_s := \Lambda^p(a_s)$. Soit V l'enveloppe convexe des $\Pi(b_s)$ et $W := \Pi^{-1}(V)$.

Pour $w \in \partial W$, soit s tel que $\|\Pi(\Lambda^{-p}(w)) - \Pi(a_s)\| < 1/16M$. Si $\tau = (\tau', \tau'') \in \mathcal{A}$ est tel que $\tau(b_0) = b_s$ et $w^* := \tau^{-1}(w)$ alors $\varphi(w^*) = \varphi(w)$. On montre que $w^* \in W$. Observons que V est de taille $d^{p/2}$ dans les directions complexes et d^p dans les directions réelles. D'après la condition 2, il suffit donc de montrer que $\|w^{*\prime}\| < d^{p/2}/4$ et $\|\mathrm{Re} w^{*\prime\prime}\| < d^p/4$. Comme τ' et $\frac{1}{\sqrt{d}}\Lambda'$ sont des isométries de $\mathbb{C}^n$ où $\Lambda = (\Lambda', \Lambda'')$, on obtient

$$\|w^{*\prime} - b'_0\| = \|w' - b'_s\| = d^{p/2}\|\Lambda^{-p}(w)' - a'_s\| < d^{p/2}/16M \leq d^{p/2}/16.$$

D'où $\|w^{*\prime}\| < d^{p/2}/4$ car $\|b_0\| < 1/100$.

Posons $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}', \tilde{\tau}'') := \tau_{b_s}^{-1} \circ \tau \circ \tau_{b_0}$, $w_1 := \tau_{b_s}^{-1}(w)$ et $w_2 := \tilde{\tau}^{-1}(w_1)$. On a alors $w^* = \tau_{b_0}(w_2)$. D'après la proposition 5.12 appliquée à $\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau}$ est linéaire isométrique et on obtient

$$\|w_2'\| = \|w_1'\| = \|w' - b_s'\| \leq d^{p/2}/16M.$$

On a aussi $\mathrm{Re} w_1'' = w'' - \mathrm{Re} b_s'' + 2\mathrm{Im} q(w' - b_s', \overline{b}_s')$. D'où

$$\|\mathrm{Re} w_1''\| \leq \|w'' - \mathrm{Re} b_s''\| + 2M\|w' - b_s'\|\|b_s'\| \leq 3d^p/16$$

car

$$\|w'' - \mathrm{Re} b_s''\| = d^p\|\Lambda^{-p}(w)'' - a_s''\| < d^p/16M \leq d^p/16$$

et

$$\|w' - b_s'\|\|b_s'\| = d^p\|\Lambda^{-p}(w)' - a_s'\|\|a_s'\| \leq d^p/16M \leq d^p/16.$$

D'après la proposition 5.12 appliqué à $\tilde{\tau}$, on a $\|\mathrm{Re} w_2''\| \leq 3d^p/16$ car $w_2 = \tilde{\tau}^{-1}(w_1)$. Comme $w^* = \tau_{b_0}(w_2)$, on a $\mathrm{Re} w^{*\prime\prime} = \mathrm{Re} w_2'' + \mathrm{Re} b_0 - 2\mathrm{Im} q(w_2', \overline{b}_0)$. Par conséquent,

$$\|\mathrm{Re} w^{*\prime\prime}\| \leq \|\mathrm{Re} w_2''\| + \|\mathrm{Re} b_0''\| + 2M\|w_2'\|\|b_0\| \leq \frac{3d^p}{16} + \frac{1}{100} + \frac{d^{p/2}}{800} \leq \frac{d^p}{4}.$$

Il en résulte que $\mathcal{A}_{|J^*}$ est co-compact. On a $\varphi(J^*) = J_k$, en effet $\varphi(J^*)$ est un compact de J_k et contient l'ensemble dense $\bigcup_{s\geq 0} f^{-s}(\varphi(b_0))$.

Montrons que $\mathcal{A}$ agit transitivement sur les fibres de φ. La proposition 5.12 montre que $\mathcal{A}$ agit transitivement sur la fibre $\varphi^{-1}(z)$ pour tout $z \in J_k$. Comme $\#f^{-1}(z) \leq d^k$ pour tout z, l'ensemble $\Lambda^{-1}(\mathcal{A}w)$ est une réunion d'au plus d^k orbites de $\mathcal{A}$ pour tout $w \in J^*$. Si $\varphi(w) \notin f(\mathcal{C}_f)$, on a $\#f^{-1}(w) = d^k$ où $\mathcal{C}$ signifie l'ensemble critique. La relation $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda$ implique que $\varphi^{-1}(\mathcal{C}_f) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{C}_\varphi)$. Alors pour tout $w \in J^* \setminus \Lambda^{-1}(\mathcal{C}_\varphi)$, l'ensemble $\Lambda^{-1}(\mathcal{A}w)$ est une réunion de d^k orbites de $\mathcal{A}$. Pour un $w \in J^* \setminus \Lambda^{-1}(\mathcal{C}_\varphi)$ fixé, on peut choisir τ_1, ..., τ_{d^n} des éléments de $\mathcal{A}$ avec $\tau_1 = \mathrm{id}$ tels que $\bigcup \mathcal{A}.\Lambda^{-1}(\tau_s(w)) = \Lambda^{-1}(\mathcal{A}.w)$.

Par prolongement analytique, ceci est vrai pour tout $w \in \mathbb{C}^k$ à l'exception d'une hypersurface complexe qu'on notera S. Supposons que $\mathcal{A}$ n'agisse pas transitivement sur les fibres de φ. Il existe donc w et u tels que $u \notin \mathcal{A}.w$ et $\varphi(w) = \varphi(u)$. Quitte à pertuber légèrement w et u on peut supposer que $\Lambda^{-n}(\mathcal{A}w) \cap S = \emptyset$ et $\Lambda^{-n}(\mathcal{A}u) \cap S = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Par suite, $\varphi(\Lambda^{-1}(\tau_s(w))$ (resp. $\varphi(\Lambda^{-1}(\tau_s(u)))$ sont les d^k préimages différentes de

$\varphi(w) = \varphi(u)$ par f. On en déduit qu'il existe s_1 tel que $\varphi(\Lambda^{-1} \circ \tau_1(w)) = \varphi(\Lambda^{-1} \circ \tau_{s_1}(w))$. Comme $\tau_1 = \mathrm{id}$, on a $\varphi(\Lambda^{-1}(w)) = \varphi(\Lambda^{-1}(\tau_{s_1}(w)))$.

Par récurrence, il existe s_1, s_2, ... tels que pour tout $n \geq 1$ on ait $\varphi(w_n) = \varphi(u_n)$ où $w_n := \Lambda^{-n}(w)$ et $u_n := \Lambda^{-1} \circ \tau_{s_n} \circ \cdots \circ \Lambda^{-1} \circ \tau_{s_1}(u)$. Comme $u \notin \mathcal{A}.w$, on a $u_n \notin \mathcal{A}.w_n$ pour tout n. La suite u_n est bornée. En effet Λ^{-1} est contractante et la proposition 5.12 permet de contrôler les τ_{s_j} qui sont proches d'isométries (on montre facilement que la composante en z' est bornée; une récurrence facile permet de vérifier que la composante en z'' l'est aussi). Soit u_0 une valeur limite de cette suite. Comme w_n tend vers 0, $\varphi(u_0) = \varphi(0)$. Il existe donc $\tau \in \mathcal{A}$ tel que $\tau(u_0) = 0$. La suite $v_{n_r} := \tau(w_{n_r})$ tend vers 0 et vérifie $\varphi(v_{n_r}) = \varphi(w_{n_r})$. De plus puisque $u_n \not{/}in \mathcal{A} w_n$ on a $v_{n_r} \neq w_{n_r}$. C'est la contradiction recherchée car φ est injective au voisinage de 0.

□

Fin de la preuve du théorème 5.1— Rappelons que nous devons ici traiter le cas où la période s de b n'est pas égale à 1. Posons $F := f^s$. Le point b est fixe pour F. La fonction de Green de F est égale à celle de f. D'après les lemmes et les propositions précédents, on peut construire une application holomorphe φ et une application Λ_F tels que $F \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_F$ et tels que $\varphi(\mathbb{C}^k)$ soit de complément pluripolaire. On peut également construire un groupe $\mathcal{A}$ agissant transitivement sur les fibres de φ. Nous allons montrer que φ convient pour f.

On choisit w_1 et w_2 deux points de J^* vérifiant $f \circ \varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. Quitte à pertuber légèrement ces points, on peut supposer qu'ils n'appartiennent pas à l'ensemble critique de φ. Soit $\Lambda := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ l'application holomorphe définie au voisinage de w_1 vérifiant $\Lambda(w_1) = w_2$. Alors $G^* \circ \Lambda = dG^*$ car $G \circ f = dG$. Il suffit de montrer que Λ est affine. Posons $\overline{\Lambda} := \tau_{w_2}^{-1} \circ \Lambda \circ \tau_{w_1}$.

On a $G^* \circ \overline{\Lambda} = dG^*$ et $\overline{\Lambda}(0) = 0$. Il reste à montrer que $\overline{\Lambda}$ est linéaire. Posons $L(z', z'') := (\sqrt{d}z', dz'')$. D'après le corollaire 5.8, on a $G^* \circ L = dG^*$. En effet, d'après la proposition 5.7, il suffit de vérifier cette relation sur les droites non génériques.

Posons $\tau := L^{-1} \circ \overline{\Lambda}$. On a $G^* \circ \tau = G^*$. D'après la proposition 5.12, τ est une isométrie complexe. Donc $\overline{\Lambda}$ est linéaire et Λ est affine. Par prolongement analytique, on a $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda$ dans $\mathbb{C}^k$.

□

Corollaire 5.16 *Pour tout $z \in J_k$ l'ensemble $\bigcup_{s \geq 0} f^{-s}(z)$ est dense dans J_k.*

Preuve— Supposons que $\bigcup_{s\geq 0} f^{-s}(z)$ ne soit pas dense dans J_k. Posons $U := J_k \backslash \overline{\bigcup_{s\geq 0} f^{-s}(z)}$. Alors U est un ouvert non vide. D'après la proposition 5.15, il existe un ouvert non vide $V \subset U$ qui est une variété réelle analytique lisse. Soit $b \in V$ un point périodique répulsif de f. D'après la proposition 5.15, toute voisinage de b contient une préimage de z par un itéré de f. Donc U est vide.

□

Fin de la preuve du théorème 1.1— La preuve du théorème 1.1 se termine exactement de même manière que celle du théorème 5.1. Supposons d'abord que les f_i soient polynomiales. Dans les notations de la proposition 4.4, on choisit un point $b \in J_k \cap \Omega$ périodique répulsif pour f_1. Posons $F := f_1^s$ où s est la période de b. On peut construire l'application φ, l'application Λ_F et le groupe $\mathcal{A}$ comme dans la preuve du théorème 5.1. On peut également construire une application affine Λ_1 vérifiant $f_1 \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_1$. Le fait que f_1 et f_2 ont la même fonction de Green nous permet de construire Λ_2 de même manière que celle de Λ_1.

Le fait qu'on peut choisir φ rigide dans le cas des applications homogènes permet de passer du cas polynomial au cas général.

□

6 Ensemble exceptionnel et orbifolds

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés de l'ensemble exceptionnel puis nous démontrons le corollaire 1.3. Commençons par la proposition suivante.

Proposition 6.1 *Sous l'hypothèse du théorème 5.1, l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E} := \mathbb{P}^k \setminus \varphi(\mathbb{C}^k)$ contient un nombre fini d'hypersurfaces complexes. La réunion $\mathcal{E}'$ de telles hypersurfaces est totalement invariante, c'est-à-dire $f^{-1}(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'$. Si $k = 2$ l'ensemble $\mathcal{E}$ est algébrique.*

Preuve— Notons $\mathcal{E}^*$ l'ensemble de $z \in \mathbb{P}^k$ tel que la mesure

$$\mu_s^z := \frac{1}{d^{ks}} \sum_{f^s(w)=z} \delta_w$$

ne tende pas vers la mesure d'équilibre μ quand $s \to +\infty$. D'après [5], $\mathcal{E}^*$ contient un nombre fini d'hypersurfaces algébriques. L'ensemble $\mathcal{E}$ étant

totalement invariant par f, le support J_k de μ étant compact dans $\mathbb{P}^k \setminus \mathcal{E}$ (proposition 5.15), $\mathcal{E}$ est donc contenu dans $\mathcal{E}^*$. Par conséquent, il contient un nombre fini d'hypersurfaces algébriques. La réunion $\mathcal{E}'$ de ces ensembles algébriques est totalement invariante par f car $\mathcal{E}$ l'est.

Supposons maintenant que $k = 2$. D'après [5], $\mathcal{E}^*$ est le plus grand sous-ensemble analytique propre de $\mathbb{P}^2$ totalement invariant par f. On a $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$. Il suffit de montrer que $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$. Supposons que $\mathcal{E}^* \neq \mathcal{E}$. Avec les notations du paragraphe précédent, le point périodique répulsif b appartient à l'ensemble $\overline{\bigcup_{s\geq 0} f^{-s}(c)} \subset \mathcal{E}^*$ pour tout $c \in \mathcal{E}^* \setminus \mathcal{E}$. D'après le corollaire 5.16, $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(b)$ est dense dans J_k. Par conséquent, J_k est contenu dans $\mathcal{E}^*$. C'est la contradiction cherchée car J_k n'est pas pluripolaire. On a donc $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$.

□

Preuve du corollaire 1.3— On construit maintenant l'orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^k, n)$ associé à f_1 et f_2.

Soit H une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}^k$. On pose $n(H) = \infty$ si $H \subset \mathcal{E}$ et $n(H) = m$ si $H \not\subset \mathcal{E}$ et si la multiplicité de φ sur $\varphi^{-1}(H)$ est égale à m. D'après le proposition 6.1, il y a qu'un nombre fini d'hypersurfaces H vérifiant $n(H) = \infty$. D'après le corollaire 5.14, si $H \not\subset \mathcal{E}$, les multiplicités de φ sur les composantes irréductibles de $\varphi^{-1}(H)$ sont égales car on passe de l'une à l'autre par une application de $\mathcal{A}$. La fonction n est donc bien définie.

Montrons maintenant que f_i définit un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même. Il est clair que f_i définit un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^k \setminus \bigcup_{n(H)=\infty} H$ dans lui-même. Soit $H \not\subset \mathcal{E}$ une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}^k$. Il reste à montrer que $n(f_i(H)) = \mathrm{mult}(f_i, H)n(H)$. Posons $K := \varphi^{-1}(H)$, $L := \Lambda_i(K)$. D'après la relation $f_i \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_i$, on a $f_i \circ \varphi(K) = \varphi \circ \Lambda_i(K)$. En comptant les mutiplicités, la dernière relation nous donne

$$\mathrm{mult}(\varphi, K)\mathrm{mult}(f_i, H) = \mathrm{mult}(\varphi, L).$$

D'où $n(H)\mathrm{mult}(f_i, H) = \mathrm{mult}(\varphi, L) = n(f_i(H))$ car $L = \Lambda_i(K) = \Lambda_i \circ \varphi^{-1}(H) \subset \varphi^{-1} \circ f_i(H)$.

□

On obtient aussi avec la même démonstration le corollaire suivant:

Corollaire 6.2 *Sous l'hypothèse du théorème 5.1, il existe un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^k, n)$ tel que f définisse un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même.*

7 Endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^2$

Dans ce paragraphe, nous donnons la preuve du corollaire 1.11. L'idée est que si l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E} = \mathbb{P}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$ est vide le groupe $\mathcal{A}$ est co-compact et le couple (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 1.10; sinon on montre que $\mathcal{E}$ contient une droite complexe et on se ramène au cas polynomial où les endomorphismes permutables sont déterminés dans [7].

Notons F_1, F_2 les relevés permutables de f_1, f_2 et et J_F l'ensemble Julia d'ordre 3 de F. Cet ensemble est de dimension réelle 5, 4 ou 3.

Considérons le cas où J_F est de dimension réelle 5. L'ensemble de Julia d'ordre 2 de f_1 et f_2 est égal à $\pi(J_F) = \mathbb{P}^2$ où $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ est l'application canonique. En effet, d'après la proposition 5.15, l'application φ (définie pour f_1 et f_2) est surjective sur J_2, qui est égal à $\mathbb{P}^2$ car il contient un ouvert. Le groupe d'applications affines $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}^2$ qui agit transitivement sur les fibres de φ, est co-compact. On déduit de la construction du paragraphe 5 que les éléments de $\mathcal{A}$ sont des isométries complexes de $\mathbb{C}^2$ (*voir* la proposition 5.12). Le couple (f_1, f_2) se trouve donc dans l'exemple 1.10.

Supposons maintenant que J_F soit de dimension 4. Montrons que $\dim \mathcal{E} \geq 1$. D'après les paragraphes précédents, il existe une application linéaire diagonale Λ et un nombre réel $\alpha \neq 0$ tels que $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda$, $J^* := \varphi^{-1}(J_2) = \{\mathrm{Im} z_2 = \alpha |z_1|^2\}$ où f est un certain itéré de f_1. Par suite $\dim J_2 = 3$. Les élément de $\mathcal{A}$ du type $\tau \circ \tau_v$ où τ est une application linéaire isométrique complexe, $v = (v_1, v_2) \in J^*$ et

$$\tau_v(z_1, z_2) := (z_1 + v_1, z_2 + 2i\alpha\overline{v}_1 z_1 + v_2).$$

Observons que τ_v préserve les variétés $\{\mathrm{Im} z_2 = \alpha|z_1|^2 + \mathrm{const}\}$.

Quitte à effectuer un changement de coordonnées du type $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \pm z_2)$, on peut supposer que $\alpha \geq 0$. Posons $B_n := \{\|z\| \leq n\}$ et $\mathcal{D}_m := \{z_2 = -2mi\}$. Notons $\mathcal{D}_m^* := \mathcal{A}\mathcal{D}_m$. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont décrits ci-dessus. On montre facilement que $\mathcal{D}_m^* \cap B_n = \emptyset$ pour $m >> n$. D'après le corollaire 5.14 et la proposition 5.15, $\varphi^{-1} \circ \varphi(\mathcal{D}_m) = \mathcal{D}_m^*$. Par conséquent, on a $\varphi(B_n) \cap \varphi(\mathcal{D}_m) = \emptyset$ pour $m >> n$ car $\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{D}_m)) \cap B_n = \mathcal{A}\mathcal{D}_m \cap B_n = \emptyset$. Le complémentaire de $\varphi(B_n)$ pour n assez grand. On en déduit qu'il contient une image holomorphe non constante de $\mathbb{C}$: $\varphi(\mathcal{D}_m)$. Donc $\dim \mathcal{E} \geq 1$. De même manière, on montre que si $\dim J_F = 3$ et $\dim J_2 = 2$ on a $\dim \mathcal{E} \geq 1$.

Notons $\mathcal{F}$ la courbe algébrique contenue dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire on ne considère pas les points isolés éventuels de $\mathcal{E}$ (*voir* la proposition 6.1). Alors $f_1^{-1}(\mathcal{F}) = f_2^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. D'après [11, 6], $\mathcal{F}$ contient une droite complexe.

Si $\mathcal{F}$ contient trois droites complexes, f_1 est égale à $[\lambda_0 w_{\alpha_0}^{d_1} : \lambda_1 w_{\alpha_1}^{d_1} : \lambda_2 w_{\alpha_2}^{d_1}]$ et f_2 est égale à $[\beta_0 w_{\nu_0}^{d_2} : \beta_1 w_{\nu_1}^{d_2} : \beta_2 w_{\nu_2}^{d_2}]$ où $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, (ν_0, ν_1, ν_2) sont des permutations de $(0, 1, 2)$ et λ_i, β_i sont des constantes non nulles. On en déduit que (f_1, f_2) est conjugué à un couple dans l'exemple 1.6.

Supposons que $\mathcal{F}$ contienne exactement deux droites complexes. Notons $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ces deux droites. Alors $f_i^2(\mathcal{E}_j) = \mathcal{E}_j$. Par conséquent les f_i^2 sont polynomiales. D'après [7], il existe un système de coordonnées affines tel que l'une de deux conditions suivantes soit vraie:

1. $f_i^2 = (\lambda_i z_1^{d_i^2}, \pm \mathrm{T}_{d_i^2}(z_2))$;
2. $f_i^2 = (\lambda_i z_1^{d_i^2}, \pm z_1^{d_i^2/2} \mathrm{T}_{d_i^2}(z_2/\sqrt{z_1}))$

où les λ_i sont des constantes non nulles.

Il existe alors des constantes non nulles β_i et des fonctions rationnelles R_i telles que $f_i = (\beta_i z_1^{\pm d_i}, R_i(z_1, z_2))$.

Dans le premier cas, comme l'application f_i^2 préserve la fibration $\{z_1 = \mathrm{const}\}$, elle préserve aussi la fibration $f_i(\{z_1 = \mathrm{const}\})$. On en déduit que ces deux fibrations sont égales. Par conséquent, R_i est indépendante de z_1. Les fractions R_i sont permutables et $R_i^2 = \pm \mathrm{T}_{d_i^2}$. Donc $R_i = \pm \mathrm{T}_{d_i}$ et (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 1.7.

Dans le deuxième cas, on montre comme ci-dessus que f_i préserve la fibration $\{z_1 = c z_2^2\}$. Par conséquent, il existe des fonctions rationnelles d'une variable, permutables, S_i telles que $R_i(z_1, z_2) = z_1^{\pm d_1/2} S_i(z_2/\sqrt{z_1})$ et $S_i^2 = \pm \mathrm{T}_{d_i^2}$. On en déduit que $S_i = \pm \mathrm{T}_{d_i}$ et on vérifie facilement que (f_1, f_2) est conjugué à un couple obtenu dans l'exemple 1.9 pour $h_i = z^{\pm d_i}$ [7].

Si $\mathcal{F}$ contient une seule droite complexe, le couple (f_1, f_2) est conjugué à un couple d'applications polynomiales. D'après [7], il est conjugué à l'un des couples décrits dans les exemples 1.5-1.9.

References

[1] *H. Alexander*, Projective capacity, *Ann. Math. Studies*, **100** (1981), 3-27.

[2] *E. Bedford and J. Smillie*, External rays in dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$, *Contemporary Mathematics*, **222** (1999), 41-79.

[3] *F. Berteloot, J.J. Loeb*, Une caractérisation des exemples de Lattès de $\mathbb{P}^k$, *Prépublication.*

[4] *J.Y. Briend et J. Duval*, Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{CP}^k$, *Acta Math.*, **182** (1999), 143-157.

[5] *J.Y. Briend et J. Duval*, Propriétés ergodiques des endomorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, *Prépublication.*

[6] *D. Cerveau, A. Lins Neto*, Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbb{CP}^n$, *Prépublication* (1998).

[7] *T.C. Dinh*, Sur les endomorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{C}^2$, *Prépublication.*

[8] *A.E. Eremenko*, On some functional equations connected with iteration of rational function, *Leningrad. Math. J.*, **1** (1990), No. 4, 905-919.

[9] *P. Fatou*, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math.*, **2** (1923), 343.

[10] *J.E. Fornaess*, Dynamics in several complex variables, *CBMS*, vol. **81**, A.M.S. Providence RI 1996.

[11] *J.E. Fornss, N. Sibony*, Complex dynamics in higher dimension I, *Astérique*, **222** (1994), 201-213.

[12] *J.E. Fornss, N. Sibony*, Complex dynamics in higher dimension, *in Complex potential theory*, (Montréal, PQ, 1993), Nato ASI series Math. and Phys. Sci., vol. **C439**, Kluwer (1994), 131-186.

[13] *G. Julia*, Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **39** (1922), 131-215.

[14] *S. Lamy*, Alternative de Tits pour Aut$[\mathbb{C}^2]$, *Prépublication.*

[15] *J.F. Ritt*, Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc*, **25** (1923), 399-448.

[16] *D. Ruelle*, Elements of differentiable dynamics and bifucation theory, *Academic Press*, 1989.

[17] *W. Schwick*, Normality criteria for families of meromorphic functions, *J. Anal. Math.*, **52** (1989), 241-289.

[18] *N. Sibony*, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$, *Panoramas et Synthèses*, (1999).

[19] *N. Sibony and P.M. Wong*, Some results on global analytic sets, *Séminaire Lelong-Skoda*, L.N **822** (1980), 221-237.

[20] *S. Smale*, Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed, *Physica*, **D51** (1991), 267-273.

[21] *S. Sternberg*, Local contractions and a theorem of Poincaré, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 809-823.

[22] *W. Thurston*, On the combinatorics of iterated rational maps, *Princeton Univ., Princeton, N.J.* (1985).

[23] *A.P. Veselov*, Integrable mappings and Lie algebras, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **292** (1987), 1289-1291; English transl. in Soviet Math. Dokl., **35** (1987).

Tien-Cuong Dinh
Mathématique - Bâtiment 425
UMR 8628, Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex (France)
TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr

Nessim Sibony
Mathématique - Bâtiment 425
UMR 8628, Université Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex (France)
Nessim.Sibony@math.u-psud.fr